Theoretische Physik IV: Statistische Physik und Thermodynamik
Übungsblatt 9

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Michael Kaicher, M.Sc.
Andrii Sokolov, M.Sc.

WS 2018/2019 **Abgabe 19.12.18**

Info: *Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Aufgabe 1: Das zweidimensionale Elektronengas (*24 Punkte*)

Wir betrachten ein zweidimensionales Gas aus freien Elektronen, welche sich auf einer rechteckigen Fläche A befinden.
Hinweis: Sie können das Ergebnis aus Aufgabenteil a) nutzen, um die Folgeaufgaben zu lösen.

a) Zeigen Sie, dass die zweidimensionale Zustandsdichte des Elektronengases durch

$$D_{\text{2-dim}} = (2s+1)\frac{Am}{2\pi\hbar^2}$$

(m ist hier die Masse eines Elektrons und $s = 1/2$ der Elektronenspin) gegeben (und somit konstant) ist. (*6 Punkte*)

Hinweis: Es gilt $k^2 = \frac{2\varepsilon m}{\hbar^2}$ und $dk = \sqrt{m}d\varepsilon/(\hbar\sqrt{2\varepsilon})$. Berechnen Sie die Anzahl an Zuständen $g(k)dk$ im k-Raum und berechnen Sie daraus die Anzahl der Zustände in der Energiedarsatellung $g(k)dk = D(\varepsilon)d\varepsilon$, mit $D(\varepsilon) = D_{2\text{-}dim}$.

b) Berechnen Sie das grosskanonische Potential $\Omega(T, V, \mu)$ aus der grosskanonischen Zustandssumme

$$Z_G = \prod_\lambda \left(1 + \exp\left(-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)\right)\right)$$

und berechnen Sie die mittlere Teilchenzahl

$$\langle N\rangle = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{T,V} \tag{1}$$

(*3 Punkte*)

c) Stellen Sie den in Aufgabenteil b) berechneten Ausdruck für $\langle N\rangle$ mit Hilfe des in Aufgabenteil a) gezeigten Ergebnisses als Energie-Integral dar und finden Sie damit einen expliziten Ausdruck für $\langle N\rangle(\mu)$ für den Grenzfall $T \to 0$. (*3 Punkte*)

Hinweis: Bilden Sie den Grenzwert $T \to 0$ vor der Integration. Es gilt:

$$\lim_{T\to 0}\frac{1}{\exp\left(\beta(\varepsilon - \mu)\right) + 1} = \theta(\mu - \varepsilon),$$

wobei letzteres die Thetafunktion darstellt.

d) Berechnen Sie

$$\langle N\rangle = \int_0^\infty D(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon \tag{2}$$

nun allgemein für das Elektronengas als Funktion von μ und T, wobei $D(\varepsilon) = D_{\text{2-dim}}$ und $f(\varepsilon)$ die Fermi-Verteilung ist. (*6 Punkte*)

Hinweis: Die Substitution $t = e^z$ könnte beim Lösen des Integrals hilfreich sein.

e) Wir nehmen nun an, dass die Teilchenzahl erhalten ist. Die Fermienergie ε_F ist definiert als $\varepsilon_F \equiv \mu(T = 0)$. Stellen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufgabenteil c) und d) einen Ausdruck der das chemische potential $\mu(T)$ in Abhängigkeit von T (und ε_F) ausdrückt. Bestimmen Sie daraus die Temperatur $T_{\mu=0}$. Geben Sie eine Näherung für $\mu(T)$ für die beiden Grenzfälle, $k_B T \ll \varepsilon_F$ und $k_B T \gg \varepsilon_F$, an. (*6 Punkte*)

Aufgabe 2: Wärmekapazität am Beispiel von Phononen und Photonen (*6 Punkte*)

Wir haben bereits gelernt, dass die Energie eines elektromagnetischen Feldes in einem Hohlraumresonator in der Form von *Photonen* quantisiert ist. Für den Fall, dass sich die Photonen im thermischen Gleichgewicht mit einem Reservoir der Temperatur $\tau \equiv k_B T$ innerhalb eines Würfels der Kantenlänge L befinden (der Würfel soll ein perfekter Leiter sein), gilt für die Energie pro Volumen $V = L^3$:

$$\frac{U(\tau)}{V} \approx \frac{\pi^2 \tau^4}{15 \hbar^3 c^3}.$$

Innerhalb eines Festkörpers kann die Energie jedoch auch in Form von elastischen Wellen quantisiert sein, man bezeichnet die elementaren Anregungen hier als *Phononen.* Für $T \ll \theta_{\text{Debye}}$ gilt für Phononen analog

$$U(\tau) \approx \frac{3\pi^4 N \tau^4}{5 \theta_{\text{Debye}}^3 k_B^3}, \tag{3}$$

wobei N die Anzahl an Teilchen im Volumen V ist. Wir betrachten einen dielektrischen Festkörper mit $\theta_{\text{Debye}} = 100K$ und einer Dichte von 10^{22}Atome$/cm^3$.
Bestimmen Sie die Temperatur T_{photon}, bei der der Beitrag der Photonen zur Wärmekapazität C_V (konstantes Volumen) gleich des Beitrags C_V der Phonen bei Temperatur $T_{\text{phonon}} = 1K$ ist und überlegen Sie sich ob ihr Ergebnis sinnvoll ist.