Theoretische Physik V

SS 2016 **19.04.2016**
Blatt 1 **Fälligkeitsdatum 25.04.2016**

Aufgabe 1: Drehimpulsoperator-Algebra

Wie aus der Quantenmechanik I Vorlesung noch bekannt, gelten für die quantenmechanischen Drehimpulsoperatoren folgende Kommutatorrelationen:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z, \qquad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar\hat{J}_x, \qquad [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar\hat{J}_y.$$

Die beiden Operatoren $\hat{J}^2$ und $\hat{J}_z$ bilden einen vollständigen Satz kommutierender Observablen (v.S.k.O.) und besitzen daher eine orthonormale Basis des Zusatandraums aus gemeinsamen Eigenvektoren, welche wir hier als $|\alpha, \beta\rangle$ schreiben, wobei $\hat{J}^2|\alpha, \beta\rangle = \alpha|\alpha, \beta\rangle$ und $\hat{J}_z|\alpha, \beta\rangle = \beta|\alpha, \beta\rangle$ gilt.

a) Es sei $\hat{J}_\pm \equiv \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$. Zeigen Sie damit folgende Relation:

$$\hat{J}_z\hat{J}_\pm|\alpha, \beta\rangle = (\beta \pm \hbar)\hat{J}_\pm|\alpha, \beta\rangle.$$

und beschreiben Sie in eigenen Worten, was $\hat{J}_\pm$ mit den Eigenwerten von $\hat{J}_z$ bewirkt.
(2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für jeden Eigenvektor $|\alpha, \beta\rangle$: $\langle\hat{J}_z^2\rangle \leq \langle\hat{J}^2\rangle$, bzw. zeigen Sie, dass $-\sqrt{\alpha} \leq \beta \leq \sqrt{\alpha}$ und damit, dass ein Maximum und Minimum von β für ein gegebenes α existiert.
(2 Punkte)

c) Beweisen Sie folgende Relation durch nachrechnen:

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z.$$

(2 Punkte)

d) Betrachten Sie $\hat{J}_-\hat{J}_+|\alpha, \beta_{max}\rangle$ und $\hat{J}_+\hat{J}_-|\alpha, \beta_{min}\rangle$ und zeigen Sie, dass $\beta_{min} = -\beta_{max}$.
(2 Punkte)

e) Es sei $j \equiv \beta_{max}/\hbar$. Zeigen Sie, dass alle zulässigen Eigenwerte von $\hat{J}^2$ als $\hbar^2 j(j+1)$ geschrieben werden können (wobei j ganzzahlig oder halb-ganzzahlige Werte annehmen kann).
(1 Punkt)

f) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\hat{J}_z$ für ein gegebenes j nur folgende Werte annehmen können: $-j\hbar, (-j+1)\hbar, ..., (j-1)\hbar, j\hbar$.
(1 Punkt)

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator

Betrachtet wird ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen parabolischen Potential. Der Hamilton eines solchen Systems ist gegeben durch:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2,$$

wobei ω die Stärke des harmonischen Potentials charakterisiert und $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{H}$.
(10 Punkte)
Hinweis: Drücken Sie $\hat{H}$ durch $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega})$ sowie dem adungierten Operator $\hat{a}^\dagger$ aus. Nutzen Sie, dass $\hat{H}$ mit $\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ einen v.S.k.O. mit gemeinsamer Eigenbasis $|n\rangle$ bildet, wobei $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$. Es gilt: $[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0$ und $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{1}$. Untersuchen Sie $\hat{H}(\hat{a}^\dagger|n\rangle)$ und $\hat{H}(\hat{a}|n\rangle)$ um die Wirkung von $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ auf $|n\rangle$ zu verstehen.

Aufgabe 3: Zeitabhängige und zeitunabhängige Störungsrechnung

Zeigen Sie, dass im Fall einer zeitunabhängigen Störung die Matrixelemente des Korrekturterms erster Ordnung am Zeitentwicklungsoperator

$$\langle m| \hat{\mathrm{U}}_I^{(1)}(0, -\infty) |n\rangle$$

den in der Vorlesung eingeführten $c_{nm}^{(1)}$ entsprechen. Vergessen Sie nicht die Störung adiabatisch anzuschalten.

Aufgabe 4: Zwei gekoppelte Spins in verschiedenen Magnetfeldern

Betrachten Sie zwei Spin 1/2, L und R, in verschiedenen Magnetfeldern $\mathbf{B}_L$ und $\mathbf{B}_R$. Da die magnetischen Momente der Spins gekoppelt sind ist der volle Hamiltonian

$$\hat{\mathrm{H}} = h\mu_B(\mathbf{B}_L\hat{\mathbf{S}}_L + \mathbf{B}_R\hat{\mathbf{S}}_R) + J\hat{\mathbf{S}}_L\hat{\mathbf{S}}_R.$$

Nehmen Sie weiter an die Magnetfelder seien gleich stark mit Amplitude B und entgegengesetzt gerichtet. Wählen Sie die Quantisierungsachse entlang dieser Richtung.

a) Drücken Sie den Hamiltonian in der Basis $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ aus und bestimmen Sie die Eigenwerte. Drücken Sie die gemischten Eigenvektoren durch den Winkel α aus, wobei $\tan\alpha = J/2B$. Sei $g > 0$; was ist der Grundzustand des Systems?

b) Was ist die natürliche Zweiteilung des Systems?

c) Sei das System im Grundzustand. Bestimmen Sie die reduzierten Dichtematrizen $\hat{\rho}_L$ und $\hat{\rho}_R$.

d) Bestimmen Sie den Grad der Verschränkung zwischen den Spins. Bestimmen Sie dazu zuerst die Entropie beider Dichtematrizen $\hat{\rho}_L$ und $\hat{\rho}_R$ als Funktion von α. Wie verhält sich die Verschränkung für $g\mu_B B \gg |J|$ und wie für $B \to 0$?