Theoretische Physik V

SS 2016 **25.04.2016**
Blatt 2 **Fälligkeitsdatum 02.05.2016**

Aufgabe 1: Spin im magnetischen Feld

Der Hamilton der die Kopplung zwischen Magnetfeld $\mathbf{B}$ und Spin $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ mit Spinvektor $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ beschreibt ist durch

$$\hat{H} = g\mu_B \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}}$$

gegeben. Nehmen Sie an, dass für den g-Faktor $g < 0$ gilt. Zu Beginn befindet sich das System im Grundzustand, d.h. alle Spins zeigen in Richtung der Magnetfeldlinien. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sich nun die Richtung des Magnetfelds schlagartig ändern: Es wird um einen Winkel θ rotiert. Da die Änderung des Magnetfeldes nicht langsam, sondern ruckartig geschieht, befindet sich die Wellenfunktion nicht mehr ausschließlich in nur einem der beiden Eigenzustände des neuen Hamiltons. Nehmen Sie an, dass die z-Achse die Richtung des neu asugerichteten Magnetfeldes ist, s.d. der Hamilton nun gegeben ist durch

$$\hat{H} = g\mu_B B \cdot \hat{S}_z \equiv \frac{E_z}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $E_z \equiv |g|\mu_B B$ die Zeeman Energie, also die Energiedifferenz zwischen den Spin-up und -down Zuständen.

a) Bestimmen Sie die Wellenfunktion in der oben gewählten Basis, wobei angenommen wird, dass die Rotation um θ um die y-Achse erfolgt ist. *(1 Punkt)*

b) Schreiben Sie die Schrödinger Gleichung (SG) in dieser Basis. *(1 Punkt)*

c) Lösen Sie die SG mit den Anfangsbedingungen aus a). *(1.5 Punkte)*

d) Bestimmen Sie mit Hilfe von c) die (zeitabhängigen) Erwartungswerte $\langle \hat{S}_x(t) \rangle$ und $\langle \hat{S}_y(t) \rangle$. *(2 Punkte)*

e) Hier sollen Sie die Heisenberg-Bewegungsleichungen (HEOM - Heisenberg equations of motion) für $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_y$ bestimmen. Dafür sollen Sie zuerst die HEOM für einen allgemeinen hermiteschen 2×2 Operator angeben. Die Zeitabhängigkeit von $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_y$ erhält man dann aus den Anfangsbedingungen, hier z.B. $\hat{S}_{x,y}(0) = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{x,y}$. Geben Sie die Lösungen der HEOM an. *(3 Punkte)*

f) Um die zeitabhängigen Erwartungswerte $\langle \hat{S}_x(t) \rangle$ und $\langle \hat{S}_y(t) \rangle$ zu bestimmen sollte man Ausnutzen, dass sich die Wellenfunktion im Heisenbergbild nicht ändert, und daher durch die Resultate aus a) gegeben ist. Überprüfen, ob Sie das Resultat aus d) reproduzieren können. *(1.5 Punkte)*

Aufgabe 2: Dichtematrix eines Spin–1/2 im Magnetfeld

Betrachten Sie einen Spin–1/2 im Magnetfeld; der Hamiltonian in der $\{|\uparrow\rangle\, |\downarrow\rangle\}$ Basis ist

$$\mathrm{\hat{H}} = E_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Gehen Sie vom thermodynamischen Gleichgewicht aus. Geben Sie die Dichtematrix in Abhängigkeit von der Temperatur T an. *(1 Punkt)*

b) Zur Zeit $t = 0$ dreht sich das Feld quasi instantan in x-Richtung. Der Hamilton Operator wird damit zu

$$\hat{\mathrm{H}} = E_z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beschreiben Sie die Dichtematrix aus a) in der $\{|\pm\rangle\}$ Eigenbasis des neuen Hamiltonians. *(2 Punkte)*

c) Die Dichtematrix ist nicht länger im Gleichgewicht. Benutzen sie die Zeitentwicklungsgleichung

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{\mathrm{H}}, \hat{\rho}]$$

sowie die Anfangsbedingungen aus b) zur Herleitung der zeitabhängigen Dichtematrix für $t > 0$. *(4 Punkte)*

d) Bestimmen Sie die Erwartungswerte der drei Elemente des Spinvektors in Abhängigkeit von t und T. *(3 Punkte)*

Aufgabe 3: Paarweise Wechselwirkung zweier Fermionen

Betrachten Sie zwei Elektronen (Fermionen mit Spin 1/2) in seinem System mit Niveaus $|n\rangle$ mit reellen Wellenfunktionen $\Psi_n(\mathbf{r})$ und Eigenenergien E_n. Weiterhin sei

$$\hat{\mathrm{H}} = U\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

die schwache paarweise Kontaktwechselwirkung.

a) Es seien die beiden Elektronen im selben Energieniveau n. Erklären Sie anhand des Symmetriepostulates warum nur ein Zweiteilchenzustand erlaubt ist und berechnen sie den Energiekorrekturterm basierend auf der Kontaktwechselwirkung. *(3 Punkte)*

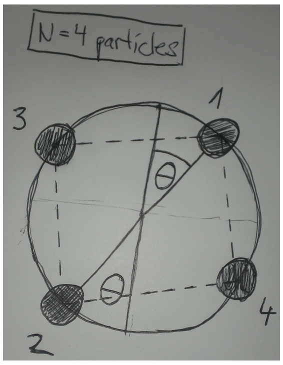
b) Wie ändert sich die Wellenfunktion unter Permutation der Koordinaten? *(1 Punkt)*

c) Die Elektronen seien in den Energieniveaus n und m. Wie viele Zustände sind möglich? Teilen Sie die Zustände nach Gesamtspin in Singlett- und Triplettzustände auf und geben Sie die Wellenfunktionen an. *(4 Punkte)*

d) Berechnen Sie erneut die Energiekorrektur aufgrund der Kontaktwechselwirkung. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4: Moleküle auf einem Ring

Betrachten Sie zwei Teilchen, welche sich auf einem Ring von Radius R befinden (siehe Abbildung, ignorieren Sie dort Teilchen 3 und 4). Die beiden Teilchen üben aufeinander eine langreichweitige, stark abstoßende Kraft aus. Deshalb ist die geringste Energie dann erreicht, wenn sich die Teilchen an entgegen gesetzen Punkten (wie in der Abbildung



gezeichnet) befinden: Sie formen eine Art *starres Molekül.* Die dadurch resultierende zwei-Teilchen-Wellenfunktion hängt demnach nur noch von der Koordinate θ ab. Auf Grund der Rotationssymmetrie, sind die Wellenfunktionen proportional zu $\exp(i\theta)$. Der Hamilton ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2MR}(-i\frac{\partial}{\partial\theta} - \nu)^2,$$

mit ganzer Zahl $\nu \in \mathbb{Z}$.

a) Nehmen Sie an, die Teilchen seien unterscheidbar und besäßen gleiche Masse M. Geben Sie die (normierte) Wellenfunktion an, welche für diskrete Werte des Impulses angenommen werden und berechnen Sie die zugehörigen Energien.
Hinweis: Der Impuls in Polarkoordinaten ist durch die Ableitung nach θ gegeben. (3 Punkte)

b) Was ändert sich, falls die Teilchen ununterscheidbare Bosonen sind?
Hinweis: Rotation um π vertauscht die zwei Teilchen - Was bedeutet das für die Wellenfunktion, unter Berücksichtigung der Symmetrien von Bosonen? (2 Punkte)

c) Geben Sie das Energiespektrum an unter der Annahme, dass es sich bei den Teilchen um Fermionen handelt. *(2 Punkte)*

d) Betrachten Sie nun einen Aufbau mit N solcher, sich gegenseitig abstoßender Teilchen. Geben Sie das Energiespektrum an für die zwei Fälle, dass es sich bei allen Teilchen um Fermionen handelt, sowie wenn alle Teilchen Bosonen sind. *(3 Punkte)*