Theoretische Physik V

SS 2016 **03.04.2016**
Blatt 3 **Fälligkeitsdatum 09.05.2016**

Aufgabe 1: Anyonen

Das Symmetriepostulat gilt nicht in 2 dimensionalen Räumen. Als Realisierung dessen schlug Frank Wilczek 1982 hypothetische Teilchen vor, die Anyonen. Diese werden aus den Fermionen oder Bosonen durch Hinzufügen eines magnetischen Flusses abgeleitet. Bewegt sich nun ein Anyon um ein anderes herum erhält es einen zusätzlichen Phasenfaktor durch den magnetischen Fluss. Die elementaren Anregungen eines zweidimensionalen Elektronengases im *Fractional Quantum Hall* – Regime könnten Anyonen sein.

a) Betrachten Sie das Zweiteilchenmolekül von Blatt 2 Aufgabe 4. Nehmen Sie an, das Molekül sei um den Winkel α gedreht. Um welchen Winkel ist das erste Teilchen gegenüber dem zweiten gedreht. *(2 Punkte)*

b) Habe jedes Teilchen einen Fluss ν. Welche Phase erhält das Molekül durch Drehung um α, welche bei Drehung um π (Vertauschung der Teilchen)? *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie dass diese Effekte Teilchenstatistik zugeordnet werden kann. Der selbe Effekt wird erzielt für flusslose Teilchen die unter Vertauschung einen Phasenfaktor $e^{i\beta}$ erfahren. Drücken Sie diesen durch ν aus. *(2 Punkte)*

d) Bestimmen Sie das Energiespektrum des Moleküls. *(4 Punkte)*

Aufgabe 2: Fluktuationen

Jeder Einteilchenoperator $\hat{\mathrm{A}}$ kann mit Auf- und Absteigeroperatoren geschrieben werden als

$$\hat{\mathrm{A}} = \sum_{i,j} A_{ij} \hat{\mathrm{a}}_i^\dagger \hat{\mathrm{a}}_j.$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{\mathrm{A}} \rangle \equiv \langle g | \hat{\mathrm{A}} | g \rangle$ wobei $|g\rangle \equiv |\{n_k\}\rangle$, ein Fockzustand. Gibt es einen Unterschied zwischen Fermionen und Bosonen? *(5 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Varianz $\langle \hat{\mathrm{A}}^2 \rangle - \langle \hat{\mathrm{A}} \rangle^2$ für Fermionen und Bosonen. emph(5 Punkte)

Aufgabe 3: Lineare Transformationen der Auf- und Absteigeoperatoren

Betrachten Sie die bosonischen Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{b}_k^\dagger$ und $\hat{b}_k$. Eine Lineartransformation A, ausgedrückt durch eine Matrix $\check{L}$ transformiert $\hat{b}_k^\dagger$ und $\hat{b}_k$ in die Operatoren, z.B.:

$$\hat{b}'_m = \sum_k L_{mk} \hat{b}_k.$$

a) Finden Sie die Eigenschaften, die $\check{L}$ erfüllen muss, damit die Operatoren unter der Transformation A die bosonischen Kommutatorrelationen erfüllen. *(2,5 Punkte)*

Eine allgemeinere Lineartransformation B kann auch Auf- und Absteigeoperatoren miteinander mischen:

$$\hat{b}'_m = \sum_k L_{mk}\hat{b}_k + \sum_k M_{mk}\hat{b}^\dagger_k.$$

b) Geben Sie die Eigenschaften an, die $\check{L}$ und $\check{M}$ unter der Lineartransformation B erfüllen müssen, damit die resultierenden Operatoren bosonische Auf- und Absteigeoperatoren sind. *(2,5 Punkte)*

c) Betrachten Sie nun A und B und finden Sie die Bedingungen unter welcher die transformierten Operatoren die fermionischen Antikommutaterrelationen erfüllen. *(5 Punkte)*

Aufgabe 4: Bosonische Operatoren

a) Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $[\hat{b}^n, \hat{b}^\dagger]$. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass für eine hinreichend glatte Funktion F gilt: $[F(\hat{b}), \hat{b}^\dagger] = F'(\hat{b})$. *(2,5 Punkte)*

c) Zeigen Sie mit Hilfe obiger Resultate, dass: $F(\hat{b})\exp(\alpha\hat{b}^\dagger) = \exp(\alpha\hat{b}^\dagger)F(\hat{b}+\alpha)$. *(2,5 Punkte)*

d) Zeigen Sie: $\exp(\alpha\hat{b}^\dagger + \beta\hat{b}) = \exp(\alpha\hat{b}^\dagger)\exp(\beta\hat{b})e^{(\alpha\beta/2)}$. *(4 Punkte)*

Hinweis: Betrachten Sie den Operator $\hat{O}(s) = \exp(-s\alpha\hat{b}^\dagger)\exp(-s\beta\hat{b})\exp(s(\alpha\hat{b}^\dagger + \beta\hat{b}))$ und leiten Sie die Differentialgleichung her, welche er als Funktion von s erfüllt.