Theoretische Physik V

SS 2016 **10.05.2016**
Blatt 1 **Fälligkeitsdatum 17.05.2016**

Aufgabe 1: Verborgene Statistik... Zustandssummen

a) Betrachten Sie den Operator

$$\hat{Z} \equiv \exp\left(-\sum_{k,l} \hat{c}_k^\dagger M_{k,l} \hat{c}_l\right),$$

wobei $\check{M}$ eine herimitsche Matrix ist und $\hat{c}^\dagger, \hat{c}$ fermionische Auf- und Absteigeoperatoren sind. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Tr}\{\hat{Z}\} = \det[1 + \exp(-\check{M})].$$

Hinweis: Diagonalisieren Sie $\check{M}$. (2,5 Punkte)

b) Berechnen Sie

$$\mathrm{Tr}\{\exp\left(-\sum_{k,l} \hat{b}_k^\dagger M_{k,l} \hat{b}_l\right)\},$$

wobei $\hat{b}^\dagger, \hat{b}$ bosonische Auf- und Absteigeoperatoren sind. *(2,5 Punkte)*

Aufgabe 2: Anderson Model einer magnetischen Störstelle

P.W. Anderson gab folgenden Hamiltonoperator zur Beschreibung einer magnetischen Störstelle innerhalb eines nicht-ferromagnetischen Metalls an:

$$\hat{H} = \hat{H}_{metal} + \hat{H}_{imp} + \hat{H}_c,$$

mit

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{metal} &= \sum_{\mathbf{k},\sigma} E(k) \hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k},\sigma} \\
\hat{H}_{imp} &= \epsilon_0 \hat{n} + \tfrac{1}{2} U \hat{n}(\hat{n} - 1) \\
\hat{H}_c &= \sum_{\mathbf{k},\sigma} t_{\mathbf{k}} (\hat{a}_\sigma^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k},\sigma} + \hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_\sigma),
\end{aligned}$$

wobei $\hat{n} = \sum_\sigma \hat{a}_\sigma^\dagger \hat{a}_\sigma$ die Elektronenanzahl an der Störstelle angibt. Die Elektronenergien seien alle ab der Fermienergie E_F zu betrachten. $\hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger$ ($\hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}$) sind die Auf-(Ab-)steigeoperatoren der Elektronenniveaus innerhalb des Metalls. Die magnetische Störstelle besitzt ein einziges lokalisiertes (daher nur von σ abhängiges) Niveau mit zugehörigen Auf-(Ab-)steigeoperatoren $\hat{a}_\sigma^\dagger$ ($\hat{a}_\sigma$). Wechselwirkungen zwischen lokalisierten Elektronen durch den zu U proportionalen Operator machen eine doppelte Besetzung des lokalisierten Energieniveaus energetisch ungünstig.

Betrachten Sie als Vereinfachung, dass alle Energieparameter die dieses Problem beschreiben, also in diesem Fall ϵ_0, U und die Zustandsdichte

$$\Gamma(E) = 2\pi \sum_{\mathbf{k}} t_{\mathbf{k}}^2 \delta(E(k) - E),$$

viel kleiner als die Fermienergie E_F sind. Unter dieser Annahme kann man annehmen, dass $\Gamma(E)$ nicht von E abhängt und davon aussgehend das Anderson Model exakt lösen. Da jedoch die exakte Lösung zu komplex für dieses Übungsblatt wäre, wollen wir im Folgenden weitere Vereinfachungen betrachten.

a) Ignorieren Sie zunächst den Term $\hat{H}_c$. Finden Sie für den damit vereinfachten Hamiltonoperator den Grundzustand. Geben Sie das intervall für ϵ_0 an, für welches die Störstelle im Grundzustand magnetisch ist, also ein einzelnes Elektron mit entweder Spin up oder Spin down besitzt. *(3 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Korrekturen durch $\hat{H}_c$ bis zur zweiten Ordnung für alle Grundzustände. Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion des magnetischen Grundzustands mit einer Genauigkeit bis zur ersten Ordnung in $\hat{H}_c$ gegeben ist durch:

$$|\uparrow, g\rangle^{(1)} = \left(\hat{a}_{\uparrow}^{\dagger} + \sum_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} + \sum_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{\downarrow}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{k},\downarrow} \right) |0\rangle \, |g\rangle \,,$$

wobei $|0\rangle$ das Vakuum der Störstelle und $|g\rangle$ den Grundzustand des Metalls beschreibt. Geben Sie (in erster Ordnung) $\alpha_{\mathbf{k}}$ und $\beta_{\mathbf{k}}$ explizit an. *(6 Punkte)*

c) Normieren Sie die Wellenfunktion aus b) und berechnen Sie mit ihrer Hilfe die Energie von $\hat{H}$ und betsimmen Sie für welche $\alpha_{\mathbf{k}}$ und $\beta_{\mathbf{k}}$ die Energie minimal ist. *(6 Punkte)*

Aufgabe 3: Welchselwirkung als Störung

Gehen Sie von einem nichtmagnetischen, nichtwechselwirkenden Fermigas aus und behandeln Sie den Wechselwirkungsterm

$$\hat{\mathrm{H}}^{(2)} = \frac{1}{2\nu} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k'},\mathbf{q}} \sum_{\sigma,\sigma'} U(\mathbf{q}) \hat{\mathrm{c}}_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}^{\dagger} \hat{\mathrm{c}}_{\mathbf{k'}-\mathbf{q},\sigma'}^{\dagger} \hat{\mathrm{c}}_{\mathbf{k'},\sigma'} \hat{\mathrm{c}}_{\mathbf{k},\sigma}$$

als Störung.

a) Berechnen Sie die Energiekorrektur erster Ordnung für die Zustände $|\{n_k\}\rangle$ in Abhängigkeit von $U(\mathbf{q})$. *(3 Punkte)*

b) Wie ändert sich die Grundzustandsenergie sowie die Energie durch Hinzufügen eines Elektrons zum System? *(2 Punkte)*

c) Leiten Sie eine vereinfachte Form dieser Korrektur her die in der Nähe der Fermioberfläche gültig ist. Bestimmen Sie die Änderungen an Fermienergie und -geschwindigkeit. *(5 Punkte)*

Aufgabe 4: Jordan–Wigner Transformation

Viele Quantensysteme können näherungsweise as “Kette“ von Zwei–Niveau–Systemen beschrieben werden.

a) Zeigen Sie das Auf– und Absteigeoperatoren des Zwei–Niveau–Systems den fermionischen Antikommutationsrelationen gehorchen

$$\{\sigma, \sigma^\dagger\} = \mathbb{1}_2$$
$$\{\sigma, \sigma\} = \{\sigma^\dagger, \sigma^\dagger\} = 0 \ . \ \textit{(2,5 Punkte)}$$

b) Hamiltonians die k gekoppelte Zwei–Niveau–Systeme beschreiben können als Linearkombination von Einzelspinoperatoren ausgedrückt werden. Auf den vollen Hilbertraum wirken diese als:

$$\begin{aligned} \sigma_j \equiv & \quad \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes ... \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma \otimes \mathbb{1} \otimes .... \otimes \mathbb{1} \\ = & \quad (\otimes_{i=1}^{j-1} \mathbb{1}) \otimes \sigma \otimes (\otimes_{i'=j+1}^{k} \mathbb{1}) \end{aligned}$$

Zeigen Sie mithilfe dieser Notation, dass

$$\{\sigma_i, \sigma_j^\dagger\} \neq 0$$

für $i \neq j$ unterschiedliche Zwei–Niveau–Systeme. Dies bedeutet, dass die $\{\sigma_i\}$ keine fermionischen Absteigeoperatoren sind und folglich die Zwei–Niveau–Systeme keine Fermionen (in Verbindung mit anderen Zwei–Niveau–Systemen da unterscheidbar). *(2,5 Punkte)*

c) Die Jordan–Wigner Transformation bildet eine Spin–Kette aus Zwei–Niveau–Systemen auf ein System aus Fermionen ab. Dies erlaubt das Studieren elementarer Fermionen zum Beispiel mithilfe eines Quantencomputers. Die Jordan-Wigner Transformation bildet $\{\sigma_j\}$ und $\{\sigma_j^\dagger\}$ auf andere Operatoren $\{a_j\}$ und $\{a_j^\dagger\}$ ab, welche die fermionischen Antikommutationsrelationen erfüllen.
Zeigen Sie dies für

$$a_j \equiv -(\Pi_{i=1}^{j-1} \sigma_i^z) \sigma_j$$

und die zugehörigen Aufsteiger $\{a_j^\dagger\}$ *(2,5 Punkte)*

d) Zeigen Sie, dass die Transformation invertierbar ist und insbesondere, dass

$$\begin{aligned} \sigma_j^z = & \quad a_j a_j^\dagger - a_j^\dagger a_j \\ \sigma_j^x = & \quad -(\Pi_{l=1}^{j-1} \sigma_l^z)(a_j + a_j^\dagger) \\ \sigma_j^y = & \quad i(\Pi_{l=1}^{j-1} \sigma_l^z)(a_j - a_j^\dagger) \ . \textit{(2,5 Punkte)} \end{aligned}$$