Theoretische Physik V

SS 2016 **17.05.2016**
Blatt 5 **Fälligkeitsdatum 23.05.2016**

Aufgabe 1: Majorana Fermionen

Betrachten Sie ein eindimensionales Array von $N \gg 1$ diskreten Positionen in enger Wechselswirkung mit einem Supraleiter. Nehmen Sie weiter an die Elektronenenergie wäre stark spinabhängig, sodass nur eine Spinausrichtung (up) auftritt. Auf allen Positionen sitzt daher entweder ein oder kein Elektron. Die Majorana Operatoren werden definiert als

$$\tilde{c}_{2j-1} = a_j + a_j^\dagger, \quad \tilde{c}_{2j} = \frac{a_j - a_j^\dagger}{i}.$$

a) Zeigen Sie, dass die dadurch definierten Teilchen ihre eigenen Antiteilchen sind, also dass

$$\tilde{c}_n^\dagger = c_n, \quad \tilde{c}_n\tilde{c}_m + \tilde{c}_m\tilde{c}_n = 2\delta_{nm}, \quad n, m = 1, \ldots, 2N.$$

Das Array sei beschrieben durch den Hamilton

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left[-t(a_j^\dagger a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger a_j) - \mu \left(a_j^\dagger a_j - \frac{1}{2} \right) + \Delta a_j a_{j+1} + \Delta^* a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger \right].$$

Hierbei beschreibt t das Springen zwischen benachbarten Plätzen, μ ist das chemische Potential und $\Delta = |\Delta| e^{i\theta}$ beschreibt die induzierten supraleitenden Wechselwirkungen zwischen Elektronen. Zeigen Sie, dass die Majorana Operatoren

$$c_{2j-1} = e^{i\frac{\theta}{2}} a_j + e^{-i\frac{\theta}{2}} a_j^\dagger, \quad c_{2j} = -ie^{i\frac{\theta}{2}} a_j + ie^{-i\frac{\theta}{2}} a_j^\dagger$$

ebenfalls ihre eigenen Antiteilchen definieren. Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator auch geschrieben werden kann als

$$H = \frac{i}{2} \sum_j \left[-\mu c_{2j-1} c_{2j} + (t + |\Delta|) c_{2j} c_{2j+1} + (-t + |\Delta|) c_{2j-1} c_{2j+2} \right]. \tag{1}$$

Beweisen Sie die Identität $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{C, A\}$. *(5 Punkte)*

b) Man kann zeigen, dass unterhalb einer parameterabhängigen Grenzenergie keine Ebene-Wellen-Moden existieren. Wir suchen niedrig energetische Moden die exponentiell mit den Abstand zu den Arrayenden abfallen

$$\gamma' = \sum_j (\alpha'_+ x_+^j + \alpha'_- x_-^j) c_{2j-1},$$
$$\gamma'' = \sum_j (\alpha''_+ x_+^{-j} + \alpha''_- x_-^{-j}) c_{2j},$$

mit $\alpha'_\pm$, $\alpha''_\pm$ konstant. Nutzen Sie den Hamilton von Gleichung 1 und berechnen sie die Kommutatoren $[\gamma', H]$ und $[\gamma'', H]$ mithilfe der Identität $[A, BC] = \{A, B\}C -$

$B\{C, A\}$. Zeigen Sie , dass falls Moden mit Energie 0 existieren die Koeffizienten $x_\pm$ gegeben sind durch

$$x_\pm = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4t^2 + 4|\Delta|^2}}{2(t + |\Delta|)}.$$

(5 Punkte)

c) Als Randbedingungen solten die Vorfaktoren $\alpha'_+ x_+^j + \alpha'_- x_-^j$ und $\alpha''_+ x_+^{-j} + \alpha''_- x_-^{-j}$ im Grenzfall langer Arrays nicht divergieren. Außerdem gilt an der Arrayenden

$$\alpha'_+ x_+^j + \alpha'_- x_-^j|_{j=0} = 0$$
$$\alpha''_+ x_+^{-j} + \alpha''_- x_-^{-j}|_{j=N+1} = 0.$$

Erfüllen die obigen Moden γ', γ'' die Randbedingungen für $2|t| < |\mu|$? Ist es sinnvoll die möglichen Amplituden von $|x_+|$ und $|x_-|$ zu betrachten? *(3 Punkte)*

d) Sind die Randbedingungen erfüllt für $2|t| > |\mu|$, $|\Delta| \neq 0$? *(3 Punkte)*

Aufgabe 2: Verschränkung von Magnonen

Eine Bipartition des Fockraums der Elektronen sei gegeben durch: U sei der Raum aller Zustände bei welchen Elektronen mit ßpin-upërzeugt wurden und D sei der Raum aller erzeugten Elektronen mit ßpin-down". Der Vakuumzustand am Anfang kann als direktes Produkt der beiden Vakkum der U und D Räume angesehen werden: $|0\rangle = |0_U\rangle \otimes |0_D\rangle$.

a) Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|g\rangle \equiv \left(\prod_{|\mathbf{k}|<k_{F,\uparrow}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k},\uparrow} \right) \left(\prod_{|\mathbf{k}|<k_{F,\downarrow}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k},\downarrow} \right) |0\rangle$$

ein Produktzustand unter dieser Partition darstellt. *(2 Punkte)*

b) Ein Magnon-Zustand in abhängigkeit vom Wellenvektor $\mathbf{q}$ kann geschrieben werden als

$$|g''(\mathbf{q})\rangle = \hat{m}^\dagger_{\mathbf{q}} |g\rangle$$

wobei

$$\hat{m}^\dagger_{\mathbf{q}} \equiv \frac{1}{\sqrt{N_\uparrow - N_\downarrow}} \sum_{\mathbf{k}} \Theta(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \downarrow, \uparrow) \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\uparrow}.$$

Berechnen Sie die in U reduzierte Dichtematrix dieses Magnon-Zustands und bestimmen Sie die zum einzelnen Magnon-Zutsands gehörige Verschränkungsentropie (*entanglement entropy*). *(5 Punkte)*

c) Betrachten Sie einen Grundzustand der sich aus dem in a) durch eine Rotation um einen Winkel α entlang der x-Achse ergibt. Berechnen Sie die zu diesem "neuen"Grundzustand gehörige Verschränkungsentropie. *(5 Punkte)*

Aufgabe 3: Spinwellen in einem nicht-ferromagnetischen Metall

Es stellt sich heraus, dass die Elektron-Loch Anregungen von Wellenfunktionen ähnlich der Magnonen ebenfalls in nicht-ferromagnetischen Metallen vorkommen können. Man nennt solche Wellenfunktionen dann Spinwellen. Anders als Magnonen ist das Spektrum der Spinwellen linear in q für $q \to 0$ und ist durch die Geschwindikeit ν_S charakterisiert.

a) Schreiben Sie die Schrödinger Gleichung für eine Magnon-Wellenfunktion (siehe Skript oder evtl. Buch von Nazarov/Danon für Herleitung)

$$E\Psi(\mathbf{k}) = E_{eh}(\mathbf{k}, \mathbf{q})\Psi(\mathbf{k}) - \frac{U}{V}\sum_{k'} \Psi(\mathbf{k}')\Theta(\mathbf{k}', \mathbf{q}, \downarrow, \uparrow),$$

in eine Schrödingergleichung für nicht-ferromagnetische Metalle um. *(3 Punkte)*

b) Nehmen Sie an, dass $q \ll k_F$ und vereinfachen Sie die damit die Gleichung aus Aufgabenteil a). Zeigen Sie, dass die Wellenfuncktion innerhalb eines schmalen Bereichs des $\mathbf{k}$-Raums nahe der Fermioberfläche konzentriert ist und skizzieren Sie E/E_0 in Abhängigkeit von q/k_F. *(4,5 Punkte)*

c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit diese Gleichung eine Spinwelle als Lösung hat. Geben Sie ν_S in der Einheit der Fermigeschwindigkeit an. *(4,5 Punkte)*