Theoretische Physik V

SS 2016 **30.05.2016**
Blatt 5 **Fälligkeitsdatum 06.06.2016**

Aufgabe 1: Elektronen und Phononen 2: Wettbewerb zwischen Abstoßung und Anziehung

Die gegebene Coulombwechselwirkung zwischen Elektronen in Metall wirkt der Anziehung über Phononen entgegen. Da diese nur nahe der Fermioberfläche existiert, können Sie folgendes einfache Model für die Gesamtwechselwirkung verwenden:

$$U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = -U_a \Theta(\hbar\omega_0 - |\varepsilon_{\mathbf{k}_1}|)\Theta(\hbar\omega_0 - |\varepsilon_{\mathbf{k}_2}|) + U_r \Theta(E_c - |\varepsilon_{\mathbf{k}_1}|)\Theta(E_c - |\varepsilon_{\mathbf{k}_2}|).$$

Es gilt $\hbar\omega_0 \ll E_c \ll E_F$ und $U_{a,r} > 0$.

a) Geben Sie die Schrödingergleichung für Cooperpaaranregungen in diesem Modell an. *(5 Punkte)*

b) Analysieren Sie die Möglichkeit von negativen Energien und leiten sie das Supraleitungskriterium her. *(5 Punkte)*

Aufgabe 2: Wellen im Wasser

Wir beschreiben die Flüssigkeit durch Massedichte ρ, Druck p und Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$.

a) Leiten Sie die Gleichung her, die die Masseerhaltung beschreibt. Zeigen Sie außerdem, dass für inkompressible Flüssigkeiten $\nabla\mathbf{v} = 0$ gilt. *(3 Punkte) Hinweis: Satz von Gauß*

b) Benutzen Sie die Newtonschen Gesetze um für die inkompressible Flüssigkeit die Eulergleichung

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

herzuleiten wobei $\mathbf{g}$ die Gravitationsbeschleunigung beschreibt. *(5 Punkte)*

c) Geben Sie die Lösung für p für den Fall einer ruhenden Flüssigkeit an. *(1 Punkte)*

d) Sei die Flüssigkeit rotationsfrei ($\nabla \times v = 0$); dies impliziert, dass die Geschwindigkeit als Ableitung eines skalaren Potentials ϕ geschrieben werden kann. Schwache Wellen können als kleine Ablenkungen vom Gleichgewichtszustand betrachtet werden, d.h., der quadratische Term in $\mathbf{v}$ kann vernachlässigt werden. Betrachten Sie die Dynamik an der Wasseroberfläche und schreiben Sie die Eulergleichung als Differentialgleichung für ϕ. *(2 Punkte)*

e) Vernachlässigen Sie die Randbedingungen und versuchen Sie eine Ebene-Welle Lösung in x-Richtung zu finden. Ein guter Ansatz wäre

$$\phi = f(z)\cos(kx - \omega t) \tag{1}$$

Bestimmen Sie $\mathbf{v}$, die Dispersionsrelation $\omega(k)$ und die Propagationsgeschwindigkeit $v_k = \frac{\partial\omega}{\partial k}$. *(4 Punkte)*

Aufgabe 3: Oszillationen in der Magnetisierung

Diese Aufgabe beschreibt die vorher behandelte räumliche Oszillation der Magnetisierung in einer allgemeineren Art und Weise und leitet einen entsprechenden Hamiltonian her.

a) Die Magnetisierung eines Ferromagneten sei beschrieben durch das Feld$\mathbf{m}(\mathbf{r})$. Betrachten Sie einen kleinen Bereich uniformer Magnetisierung, der außerdem durch $|\mathbf{m}| = 1$ eine uniforme Messgröße definiert. Bedingt durch ein externes Magnetfeld $B_{ext} = B\hat{z}$ sei die Energie dieser Magnetisierung $E = -Bm_z$. Drücken Sie diese für kleine Abweichungen von $\mathbf{m}= \hat{z}$ in Abhängigkeit von m_x und m_z aus. *(3 Punkte)*

b) Da diese Orientierung mit der von Elektronenspins indentifiziert werden kann, ergeben sich die Bewegungsgleichungen als

$$\dot{m}_x = BM_y \text{ und } \dot{m}_y = -Bm_x.$$

Identifizieren Sie daraus generalisierte Koordinaten Q,P und leiten Sie den Hamiltonian ab. *(4 Punkte)*

Auch ohne externes Magnetfeld hängt die Energie von $\mathbf{m}$; ihr Minimum entspricht uniformer Magnetisierung und jede Abweichung davon bedeutet einen Anstieg der Energie. Dies impliziert eine Abhängigkeit der lokalen Energiedichte von den räumlichen Ableitungen der lokalen Magnetisierung. Unter Annahme von Rotationsinvarianz ist der einfachst mögliche Energieterm

$$E = C \sum_{\alpha,\beta} \int \mathrm{d}\mathbf{r} \frac{\partial m_\alpha}{\partial r_\beta} \frac{\partial m_\alpha}{\partial r_\beta},$$

mit C konstant und α, β Koordinaten.

c) Schreiben Sie den Hamiltonian mit den generalisierten Koordinaten aus b). Vereinfachen Sie die gefundene Formel mit den Ergebnissen und Annahmen aus a). *(4 Punkte)*

d) Seien $m^{\pm} = m_x \pm im_y$ und die entsprechenden Fourierkomponenten,

$$m^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kr}} m_{\mathbf{k}} \text{ und } m^- = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} m^*_{\mathbf{k}}.$$

Zeigen Sie, dass der Hamiltonian geschrieben werden kann als

$$H = \frac{C}{N} \sum_{\mathbf{k}} k^2 m^*_{\mathbf{k}} m_{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

(4 Punkte)