

# Theoretische Physik V

SS 2016  
Blatt 9

13.06.2016  
Fälligkeitsdatum 20.06.2016

## Aufgabe 1: Korrektur 1: Stark-Effekt

Ein neutrales Objekt wie z.B. ein Wasserstoffatom kann innerhalb eines elektrischen Feldes polarisiert werden und daher ein nicht verschwindendes Dipolmoment besitzen. Dieser Effekt bewirkt kleine Korrekturen am Energiespektrum des Wasserstoffatoms.

- Nehmen Sie ein elektrisches Feld in Z-Richtung und mit Stärke  $E$  an. Der Ursprung des Koordinatensystems stimme mit der Position des Atomkerns überein. Geben Sie den entsprechenden Hamiltonian  $\hat{H}_E$  an. (2,5 Punkte)
- Wir betrachten diesen als kleine Störung. Berechnen Sie die Korrektur erster Ordnung für den Grundzustand. (2,5 Punkte)
- Diagonalisieren Sie  $\hat{H}_E$  im  $n = 2$ -Unterraum –  $E = E_0 + \frac{3}{4}Ry$  Eigenraum des ungestörten Hamiltons. (2,5 Punkte)
- Was sind die möglichen Frequenzen für einen 1s-2p Übergang; wie hängt die Intensität jeweils von der Emmissionsrichtung ab? Falls eine Frequenz zu mehreren  $n=2$  Zuständen gehört, rechnen Sie mit einem zufälligen Mix. (2,5 Punkte)

## Aufgabe 3: Korrektur 2: Lamb-Shift

Ohne externes elektrisches Feld – im elektromagnetischen Vakuum – verschwindet dessen Erwartungswert  $\langle \hat{E} \rangle$  jedoch nicht  $\langle \hat{E}^2 \rangle$ . Aufgrund dessen gibt es Korrekturterme zweiter Ordnung am Energiespektrum des Wasserstoffatoms. Zur Vereinfachung einer ansonsten sehr umfangreichen Rechnung sei diese Aufgabe auf die Energiedifferenz zwischen 1s und einem 2p (z.B.  $p_z$ ) Zustand beschränkt. Dies ergibt zumindest eine Abschätzung der Größenordnung des Lamb-Shifts

- Geben Sie die zweite-Ordnung Korrekturterme für die beiden Energien als Summen über den Wellenvektor  $q$  des virtuellen Photons an. Es gelte die Dipolnäherung. Zeigen Sie, dass sich die Beiträge zu  $E_{1s} - E_{2p}$  aufheben, solange  $q$  groß ist. (4 Punkte)
- Geben Sie die Korrekturterme als Integral über Photonenenergien  $E$  und in Abhängigkeit der spontanen Emmissionsrate  $\Gamma$  an. (4 Punkte)
- Beachten Sie die logarithmische Divergenz des Integral für große Energien. Nutzen Sie die Dipolnäherung für große Energien um die Korrektur mit logarithmischer Genauigkeit zu bestimmen. (4,5 Punkte)

## Aufgabe 3: Emission eines 1-Dim. Quantendots

Ein Elektron ist innerhalb eines quasi-eindimensionalen Potentials

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & 0 \text{ falls } 0 < x, y < a \text{ und } 0 < z < L \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

eingeschlossen. Nehmen Sie an, dass  $a \ll L$ .

- a) Geben Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Wellenfunktionen und Energien der elektronischen Zustände an. (2,5 Punkte)
- b) Wir beschränken uns nun auf die niedrigsten drei Energiezustände, welche hier mit  $|111\rangle$ ,  $|112\rangle$  und  $|113\rangle$  bezeichnet werden. Angenommen, das Elektron befindet sich an Anfang im Zustand mit größter Energie  $|113\rangle$  und wir sind an die Emissionsrate von diesem Zustand in den Grundzustand interessiert, für welches  $L$  ist dann die Dipolnäherung gültig? (2,5 Punkte)
- c) Geben Sie die Matrixelemente  $M_{if}$  an, welche die Kopplung zwischen dem Anfangszustand (Elektron in  $|113\rangle$  und Photonen-Vakuum) und dem Endzustand (Elektron in  $|111\rangle$  und ein Photon mit Wellenvektor  $\mathbf{q}$  und Polarisation  $\alpha$ ) (2,5 Punkte)  
*Hinweis: Nutzen Sie die Dipolnäherung!*
- d) Berechnen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus c) die Zerfallsrate für den Übergang von  $|113\rangle$  in den Grundzustand. (2,5 Punkte)
- e) Wie wir in d) gesehen haben, ist ein direkter Zerfall von  $|113\rangle \rightarrow |111\rangle$  nicht möglich. Daher findet der Zerfall in den Grundzustand in zwei Schritten statt: Zunächst von  $|113\rangle \rightarrow |112\rangle$  und daraufhin von  $|112\rangle \rightarrow |111\rangle$ . Betrachten Sie zunächst  $|113\rangle \rightarrow |112\rangle$ : Geben Sie die Matrixelemente an, welche den Übergang des Anfangszustands mit möglichen Endzustand beschreibt. (2,5 Punkte)
- f) Berechnen Sie die Zerfallsrate für den Übergang  $|113\rangle \rightarrow |112\rangle$ . (2,5 Punkte)
- g) Geben Sie die mittlere Zerfallszeit an, die es braucht um von  $|113\rangle$  nach  $|111\rangle$  zu gelangen. (2,5 Punkte)