Theoretische Physik V

SS 2016 **20.06.2016**
Blatt 10 **Fälligkeitsdatum 27.06.2016**

Aufgabe 1: Die LC Übertragungsleitung

Der LC-Schwingkreis aus Abb. 1 kann beschrieben werden durch den Hamiltonian eines harmonischen Oszillators

$$H = \frac{q^2}{2C} + \frac{\varphi^2}{2L},$$

[a)] wobei L und C Induktivität und Kapazität beschreiben. q ist die Ladung und φ der conjugierte magnetische Fluss. Eine Übertragungsleitung kann als Kontinuumslimes einer Kette von LC–Schwingkreisen betrachtet werden (Abb. 2). Der vollständige klassische Hamiltonian ist gegeben als

$$\mathcal{H} = \sum_i \left(\frac{q_i^2}{2C} + \frac{\varphi_i^2}{2L} - \frac{1}{L}\varphi_i\varphi_{i+1} \right).$$

1. Bestimmen Sie die Dispersionsrelation der linearen Ketten sowie die erste Brillouinzone. *(4 Punkte)*

2. Was ist der quantenmechanische Hamiltonian der das System beschreibt? Finden Sie die assoziierten normalen Operatoren und diagonalisieren sie den Hamiltonian. *(4 Punkte)*

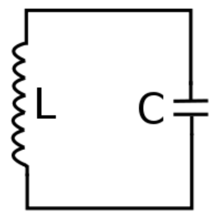

Abbildung 1: LC–Oszillator

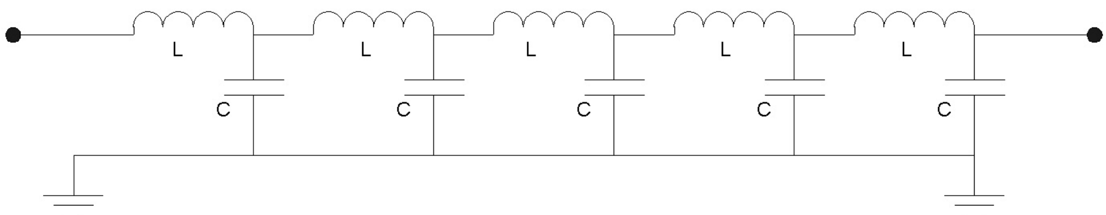

Abbildung 2: Lineare Kette von LC–Oszillatoren

Aufgabe 2: Klassische Emission eines von einem Ion gefangenen Elektrons

Betrachten Sie ein von einem Ion in einem hoch angeregten Zustand gefangenes Elektron, dessen negative Energie E viel kleiner sein soll als die atomaren Energieskala E_a. In diesem Fall kann die Bewegung des Elektron klassisch behandelt werden und wir nehmen darüber hinaus an, dass die Bewegung entlang eines kreisförmigen Orbits erfolgt.

a) Die von einem Elektron ausgestrahlte Leistung sei gegeben durch:

$$P_B = \frac{e^2 \mathbf{a}^2}{6\pi\epsilon_0 c c^2}, \tag{1}$$

wobei $\mathbf{a}$ die Beschleunigung des Elektrons beschreibt. Überlegen Sie sich, wie sie mit Gl. (1) über das Kräftegleichgewicht zw. elektrostatischer Kraft und Beschleunigung einen Ausdruck für die zeitabhängige Energie des Elektrons bekommen. (*6,5 Punkte*)

b) Beschreiben Sie in eigenen Worten was beim Übergang vom klassischen Regime ins Quantenregime geschieht. (*3,5 Punkte*)

Aufgabe 3: Kohärenter Zustand in einem harmonischen Oszillator

Die Wellenfunktion eines kohärenten Teilchens mit Erwartungswerten $\langle \hat{p} \rangle = p_0$ und $\langle \hat{x} \rangle = x_0$ sei gegeben durch

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{2\pi}}} \exp\left\{ -\frac{(x - x_0)^2}{4\sigma^2} + i\frac{p_0 x}{\hbar} \right\}.$$

a) Wir nehmen an, dass das Teilchen die Masse $m = 1$ besitzt und sich in einem parabolischen Potential der Form $\frac{1}{2}\omega^2 x^2$ befindet. Finden Sie das σ, für welches obiger Zustand ein Eigenzustand des bosonischen Vernichters

$$\hat{a} = \frac{\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar\omega}}$$

ist. Was ist der zugehörige Eigenwert λ? (*4 Punkte*)

b) Wir nehmen nun an, dass der obige kohärente Zustand den Zustand eines Teilchens zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibt: $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$. Aus den Heisenbergschen Bewegungsgleichungen ergeben sich folgende Relation:

$$\exp(i\hat{H}t/\hbar)\hat{a}\exp(-i\hat{H}t/\hbar) = \hat{a}(t) = \hat{a}\exp(-i\omega t),$$

mit $\hat{H} = 1/2(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{x}^2)$. Zeigen Sie damit, dass ein Zustand der zu Beginn ein kohärenter Zustand war, unter Evolution des gegebenen Hamiltonoperators für alle folgenden Zeitpunkte ein kohärenter Zustand sein wird. (*3 Punkte*)

c) In vorheriger Aufgabe haben Sie gezeigt, dass $\psi(x, t)$ ebenfalls ein kohärenter Zustand ist, jedoch mit zeitabhängigem Parameter $\lambda(t)$. Für die in dieser Aufgabe behandelten kohärenten Zustände gilt:

$$\lambda = \frac{\omega \langle \hat{x} \rangle + i \langle \hat{p} \rangle}{\sqrt{2\hbar\omega}}.$$

Berechnen Sie damit die zeitabhängigen Erwartungswerte $\langle \hat{x}(t) \rangle$ und $\langle \hat{p}(t) \rangle$. (*3 Punkte*)

Aufgabe 4: Unschärfe eines kohärenten Zustands

Wir zeigen in dieser Aufgabe leiten wir kohärente Zustände als Zustände minimaler Unschärfe her. Dazu:

a) Betrachten Sie die Varianz bestimmter Operatoren $\hat{A}$

$$(\Delta A)^2 = \langle\Phi|\,(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\,|\Phi\rangle \equiv \langle\hat{A}|\hat{A}\rangle$$

Nutzen sie u.a. die Schwarzsche Ungleichung um zu zeigen, dass

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\,\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right)^2 .$$

(3 Punkte)

b) In der Herleitung der obigen Unschärferelation wurden zwei Ungleichungen verwendet. Minimale Unschärfe impliziert Gleicheit. Leiten Sie eine Relation zwischen $|A\rangle$ und $|B\rangle$ her, die diese erfüllt. *(3 Punkte)*

c) Betrachten Sie $\hat{x}$ und $\hat{p}$. Geben Sie die in b) gefundene Bdingung als Eigenwertgleichung für eine Kombination aus $\hat{x}$ und $\hat{p}$ an. Was bedeutet dies für kohärente Zustände des harmonischen Oszillators? *(3 Punkte)*

d) Verifizieren Sie, dass das Gaußsche Wellenpaket

$$\Phi(x) = C\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0 x\right)\exp\left(\frac{(x-x_0)^2}{2\hbar a}\right)$$

mit $a < 0$ die Eigenwertgleichung aus c) erfüllt. *(3 Punkte)*