Theoretische Physik V

SS 2016 **04.07.2016**
Blatt 12 **Fälligkeitsdatum 11.07.2016**

Aufgabe 1: Atome als quantenmechanische Rauschmesser

1. Betrachten Sie zwei Zustände $|A\rangle$ und $|B\rangle$ die schwach durch die Variable x gekoppelt sind, welche Teil des Bosonenbades ist, das durch
$$\hat{H} = \sum_m \hbar\omega_m \hat{b}_m^\dagger \hat{b}_m - \hat{x}F_{ext}$$
gegeben ist. Der Kopplungshamiltonian ist
$$\hat{H}_{int} = \gamma\, |A\rangle \langle B|\, \hat{x} + H.c.\ .$$
Die zugehörigen Übergangsraten lassen sich über Fermis goldene Regel ermitteln. Zeigen Sie, dass der Übergang von $|A\rangle$ nach $|B\rangle$ proportional zum quantenmechanischen Rauschen von x bei der Frequenz $(E_B - E_A)/\hbar$ ist *(4 Punkte)*

2. Betrachten Sie die Zustände $|s\rangle$ und $|p_z\rangle$ eines Atoms. Des Raucshen welcher Quantität kann mithilfe des Übergangs dieser Zustände gemessen werden? Welche Rolle Spielt der Kopplungskoeffizient γ? *(3 Punkte)*

3. Berechnen Sie die dynamische Suszeptibilität des elektrischen Feldes im Vakuum, bestimmen Sie das quantenmechanische Rauschen und zeigen Sie, dass die Übergangsraten aus dem Kapitel zu Strahlung und Materie auf diese Weise reproduzierbar sind. *(3 Punkte)*

Aufgabe 2: Dissipation durch Fermis goldene Regel

Der Hamilton eines an ein Bosonenbad gekoppelten Oszillators ist
$$\hat{H} = \hat{H}_{osc} + \hat{H}_{env} + \hat{H}_{coup} - \hat{x}F_{ext}, \text{ wobei}$$
$$\hat{H}_{osc} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{a\hat{x}^2}{2},$$
$$\hat{H}_{env} = \sum_k \hbar \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k,$$
$$\hat{H}_{coup} = -\hat{x}\hat{F}, \text{ mit } \hat{F} \equiv \sum_k \hbar c_k (\hat{b}_k^\dagger + \hat{b}_k).$$

Wir betrachten den Kopplungsterm als Störung die Übergänge zwischen den Fockzuständen des ungedämpften Oszillators verursacht.

a) Zeigen Sie, dass nur Übergänge von $|n\rangle$ nach $|n-1\rangle$ möglich sind und berechnen Sie die Übergangsraten unter Annahme eines frequenzunabhängigen Reibungskoeffizienten. *(3 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Energiedissipation in Abhängigkeit von der Energie mithilfe des klassichen Bewegungsgleichungen im Grenzfall geringer Dissipation. *(4 Punkte)*

c) Finden und erklären Sie den Zusammenhang zwischen den "klassichen" und "quantenmechanischen" Resuktaten. *(3 Punkte)*

Aufgabe 3: Quantenmechanische Brownsche Bewegung

Betrachten Sie ein Teilchen, welches sich in einem dreidimensionalen, dissipativen Medium befindet. Auf dieses Teilchen soll nun eine Reibungskraft wirken, die jedoch, anders als beim gedämpften harmonischen Oszillator, nicht durch ein Potential beschränkt ist. Die Bewegungsgleichung für das Teilchen ist hier gegeben durch

$$M\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_f = -\gamma\dot{\mathbf{r}}. \tag{1}$$

Nehmen Sie an, dass Teilchen befände sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an einem festen Punkt im Raum. Die Wahrscheinlichkeit das Teilchen an einem um d vom Anfangspunkt entfernten Ort zu finden sei gegeben durch

$$P(d) \propto \exp(-d^2/(2\sigma(t))). \tag{2}$$

a) Wie hängt $\sigma(t) \equiv \langle[\hat{x}(t) - \hat{x}(0)]^2\rangle$ mit dem Rauschen $S(\omega)$ (*engl.: noise*) zusammen? - $S(\omega)$ ist die Fouriertransformierte des Korrelators $S(t) = \langle x(t_1)x(t_1 + t)\rangle$. (*3 Punkte*)

b) Finden Sie die Suszeptibilität $\chi(\omega)$ für diese Variable, bestimmen Sie das Rauschen und drücken Sie $\sigma(t)$ durch ein Integral über ω aus. (*3 Punkte*)

c) Eine wichtige Zeitskala für dieses Problem ist $t_r = M/\gamma$. Nehmen Sie an, dass $k_B T \ll \hbar/t_r$. Bestimmen Sie $\sigma(t)$ für $t \ll t_r$. (*3 Punkte*)

   Hinweis: Zur Überprüfung: $\sigma(t) = t^2\hbar\int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi}\frac{\gamma\omega}{M\omega^2+\gamma^2}$. *Um die Divergenz des Integrals für große* ω *in den Griff zu bekommen, wird ein cut-off bei* $\omega \simeq t^{-1}$ *eingeführt, wo die Approximation für* $\sin^2$ *sonst nicht mehr gültig ist.*

d) Bestimmen Sie $\sigma(t)$ für $t_r \ll t \ll \hbar/(k_B T)$. (*3 Punkte*)

   Hinweis: Für diese Zeitskala kann angenommen werden, dass $\sin^2(x) \approx x^2$ *und ein cut-off des Integrals bei* $\omega \simeq t^{-1}$ *gemacht werden kann.*

e) Bestimmen Sie $\sigma(t)$ für $t \to \infty$. Erläutern Sie danach, wieso im Titel von "Brownscher Bewegung"gesprochen wurde. (*2 Punkte*)

   Hinweis: Approximieren Sie $\mathrm{cotanh}(\hbar\omega/(2k_B T)) \approx 2k_B T/(\hbar\omega)$.

Aufgabe 4: Dichtematrix eines gedämpften harmonischen Oszillators

Betrachten Sie den Hamiltonoperator eines gedämpften harmonischen Oszillators

$$\hat{H} = \sum_m \hbar\omega_m \hat{b}_m^\dagger \hat{b}_m - \hat{x}F_{ext}, \tag{3}$$

mit

$$\hat{x} = \hbar\sum_m (C_m \hat{b}_m^\dagger + C_m^* \hat{b}_m), \tag{4}$$

mit bosonischen Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{b}_m^\dagger$ und $\hat{b}_m$ (hier: $M = 1$).

a) Drücken Sie $\hat{b}_m^\dagger$ und $\hat{b}_m$ durch die entsprechenden $\hat{x}_m$ und $\hat{p}_m$ aus und stellen Sie $\hat{x}$ als gewichtete Summe über $\hat{x}_m$ dar. (*3 Punkte*)

b) Finden Sie den Grundzustand des Bades in der Koordinatendarstellung. Wie lautet die zugehörige Dichtematrix $\hat{\rho}(\{x_m\}, \{x'_m\})$? (*3 Punkte*)

Hinweis: Die Oszillatoren sind unabhängig. Somit kann die Grundzustandswellenfunktion als Produkt von Grundzustandswellenfunktionen einzelner Moden geschrieben werden.