Theoretische Physik V

SS 2016 **11.07.2016**
Blatt 13 **Fälligkeitsdatum 18.07.2016**

Dieses Übungsblatt dient vor allem der Wiederholung von Grundlagen der SRT aus TP2.

Aufgabe 1: Lorentz Transformation

Die Lorentz Transformation zwischen zwei unbeschleunigten Beszugssystemen ist gegeben durch

$$[x'^{\mu}] = [\Lambda^{\mu}{}_{\nu}][x^{\nu}], \tag{1}$$

wobei $[x'^{\mu}]$ einen Spaltenvektor mit Einträgen $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ darstellt und $[\Lambda^{\mu}{}_{\nu}]$ ist die Lorentz Transformationsmatrix

$$[\Lambda^{\mu}{}_{\nu}] = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\gamma(v)v/c & 0 & 0 \\ -\gamma(v)v/c & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

v ist die Relativgeschwindigkeit der Bezugssysteme zueinander, c ist die Lichtgeschwindigkeit und $\gamma(v)$ der Lorentzfaktor $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Geben Sie die inverse Lorentztransformation an, welche (x^0, x^1) durch (x'^0, x'^1) ausdrückt. (*2 Punkte*)

Aufgabe 2: Geschwindigkeitstransformation

Wir beschränken uns weiterhin auf eine Bewegung in x^1-Richtung. Aus den Lorentztransformationen aus obiger Aufgabe folgt, dass für die Koordinaten zweier Ereignisse 1 und 2 in den zwei unbeschleunigten Bezugssystemen gilt

$$\begin{aligned} t'_1 &= \gamma(v)(t_1 - vx_1/c^2) \\ x'_1 &= \gamma(v)(x_1 - vt_1) \\ t'_2 &= \gamma(v)(t_2 - vx_2/c^2) \\ x'_2 &= \gamma(v)(x_2 - vt_2) \\ y &= y', \quad z = z'. \end{aligned} \tag{3}$$

Mit $\Delta t = t_2 - t_1$ und $\Delta x = x_2 - x_1$, wie lauten die Geschwindigkeitskomponenten v'_x, v'_y und v'_z? (*2 Punkte*)

Aufgabe 3: Minkowski Raumzeit

Im vierdimensionalen Minkowski-Raum ist die Entfernung zweier Ereignisse definiert als

$$(\Delta s)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} \Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu}, \tag{4}$$

wobei es sich bei $\eta_{\mu,\nu}$ um die vierdimensionale Minkowski-Metrik handelt

$$[\eta_{\mu\nu}] \equiv \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Mit Hilfe dieser Metrik lassen sich drei Fälle unterscheiden:

- $(\Delta s)^2 > 0$: *Zeitartig*, d.h. es gibt ein Bezugssystem in dem die zwei Ereignisse auf welche sich das Intervall beziehen am gleichen Ort, jedoch zu unterschiedlichen Zeitpunkten geschehen. Die beiden Ereignisse sind kausal miteinander verknüpft.
- $(\Delta s)^2 = 0$: *Lichtartig*, d.h. alle Beobachter sind sich darüber einig, dass die beiden Ereignisse durch ein Lichtsignal verbunden werden können. Die beiden Ereignisse sind kausal miteinander verknüpft.
- $(\Delta s)^2 < 0$: *Raumartig*, d.h. es gibt ein Bezugssystem in welchem die beiden Ereignisse gleichzeitig, jedoch an verschiedenen Orten geschehen. Die beiden Ereignisse sind nicht kausal miteinander verknüpft.

Für zwei zeitartig entfernte Ereignisse ist die Eigenzeit definiert als

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta s)^2/c^2. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass für zwei zeitartig entfernte Ereignisse 1 und 2 die Eigenzeit das kleinste Zeitintervall ist, welches ein Beobachter zwischen den beiden Ereignissen messen kann. (*2 Punkte*)

Aufgabe 4: Relativistische(r) Energie und Impuls

Der relativistische Impuls ist gegeben durch

$$\mathbf{p} = \gamma(v)m\mathbf{v}. \tag{7}$$

In Newtonscher Mechanik ist die kinetische Energie defieniert als

$$E_{kin} = \int \frac{dp}{dt}dx = \int \frac{dx}{dt}dp = \int u dp. \tag{8}$$

a) Leiten Sie aus Gl. (8) einen Ausdruck für die relativistische kinetische Energie her. (*3 Punkte*)

b) Zeigen Sie, dass der klassiche Ausdruck für die kinetische Energie aus dem relativistischen Ausdruck als Näherung für kleine Geschwindigkeiten $v << c$ hervorgeht. (*2 Punkte*)

Hinweis: Nutzen Sie partielle Integration.

Aufgabe 5: Viererimpuls

Die Vierergeschwindigkeit ist gegeben durch

$$[U^\mu] = [\frac{dx^\mu}{d\tau}] = (c\gamma(v), \gamma(v)\mathbf{v}). \tag{9}$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \tag{10}$$

eine Konstante ist und bestimmen Sie diese. (*2 Punkte*)

Der Viererimpuls ist gegeben durch

$$[P^\mu] = m[U^\mu] = (\gamma(v)mc, \gamma(v)mv_x, \gamma(v)mv_y, \gamma(v)mv_z) = (E/c, \mathbf{p}) \tag{11}$$

und enthält alle Informationen bzgl. relativistischer Energie und Impuls eines Teilchens. Der Viererimpuls transformiert sich genauso wie $[x^\mu]$ beim Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes S zu S' aus Aufgabe 1.

b) Wie lauten demnach die Komponenten von $[P'^\mu]$ ausgedrückt durch die Komponenten aus dem ungestrichenen Beszugssystem? (*2 Punkte*)

c) Nutzen Sie das Ergebnis aus a) um die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{12}$$

herzuleiten. (*2 Punkte*)

Aufgabe 6: Vierervektoren

Wir haben bisher drei verschiedene Beispiele von Vierervektoren gesehen. Sie alle gehören der Klasse der kontravariantern Vierervektoren an. Wir wollen in dieser Aufgabe ein paar der Eigenschaften von Vierervektoren wiederholen.

Die Komponenten eines kontravarianten Vierervektors transformieren sich zwischen zwei Inertialsysteme S und S' wie folgt (wir nehmen wieder an, dass die Relatvgeschwindigkeit beider Systeme in x-Richtung erfolgt)

$$[A'^\mu] = [\Lambda^\mu{}_\nu][A^\nu] \qquad \text{bzw.} \qquad A'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu. \tag{13}$$

Jedoch sind kontravariante Vierervektoren nicht die einzige Art von Vierervektor, wie wir nun sehen werden. Wir betrachten eine skalare Funktion $\phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ und betrachten die erste Ableitung nach x^0, welche wir mit B_0 bezeichnen, $B_0 = \partial\phi/\partial x_0$.

a) Drücken Sie B'_0 durch die Komponenten des ungestrichenen Systems B_0, B_1, B_2, B_3 aus. (*3 Punkte*)

b) Verfahren Sie analog um B'_1, B'_2 und B'_3 zu bestimmen. (*2 Punkte*)

Jedes vier-komponentige Objekt, welches sich gemäß

$$[B'_\mu] = [(\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu][B_\nu] \qquad \text{bzw.} \qquad B'_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu B_\nu. \tag{14}$$

wird als kovarianter Vierervektor bezeichnet.

c) Bestimmen Sie $[(\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu]$ mit Hilfe von Aufgabenteil a) und b). (*2 Punkte*)

Kontravariante Vierervektoren werden durch einen oberen, kovariante durch einen unteren Index gekennzeichnet. Letztere transformieren sich wie Ableitungen skalarer Funktionen.

Aufgabe 7: Vierervektoren II

In dieser Aufgabe werden wir drei wichtige Eigenschaften ko- und kontravarianter Vektoren wiederholen. Falls A^0, A^1, A^2, A^3 wie ein kontravarianter Vektor transformieren, dann werden sich die vier durch

$$A_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} A^\nu \tag{15}$$

definierten Komponenten wie ein kovarianter Vierervektor transformieren. Die Minkowski-Metrik dient also dazu, um ko- in kontravariante Vierervektoren umzuformen und umgekehrt.

$$\text{Falls} \quad [A^\mu] = (a, b, c, d) \quad \text{dann} \quad [A_\mu] = (a, -b, -c, -d). \tag{16}$$

Mit

$$[\eta^{\mu\nu}] \equiv \begin{pmatrix} \eta^{00} & \eta^{01} & \eta^{02} & \eta^{03} \\ \eta^{10} & \eta^{11} & \eta^{12} & \eta^{13} \\ \eta^{20} & \eta^{21} & \eta^{22} & \eta^{23} \\ \eta^{30} & \eta^{31} & \eta^{32} & \eta^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

gilt umgekehrt

$$A^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \eta^{\mu\nu} A_\nu. \tag{18}$$

$\eta_{\mu\nu}$ und $\eta^{\mu\nu}$ verhalten sich invers zueinander

$$\sum_\nu \eta_{\alpha\nu}\eta^{\nu\beta} = \sum_\nu \eta^{\alpha\nu}\eta_{\nu\beta} = \delta^\alpha{}_\beta = \delta_\alpha{}^\beta, \tag{19}$$

mit

$$[\delta^\alpha{}_\beta] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Unter einer Krontraktion zweier Vierervekoren versteht man die Bildung einer Invarianten

$$\sum_{\nu=0}^{3} A^\nu B_\nu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3. \tag{21}$$

Größen, welche unter Lorentztransformationen invariant sind, werden auch als Lorentzskalare bezeichnet.

a) $(c\rho, J_x, J_y, J_z)$ sei ein kontravarianter Vierervektor. Auch ohne Vorkentnisse darüber, was genau die einzelnen Variablen bedeuten, kann man erschließen wie sich diese unter einer Lorentztransformation transformieren. Tun Sie dies für die Inertialsysteme S und S' und geben Sie dann die vier Komponenten des entsprechenden kovarianten Vierervektors bzgl. der entsprechenden inversen Lorentztransformation an. (*3 Punkte*)

b) Für $[J^\mu] = (c\rho, J_x, J_y, J_z)$, erklären Sie wieso man erwartet, dass $\sum_{\mu=0}^{3} J_\mu J^\mu$ invariant unter einer Lorentztransformation ist, jedoch nicht die beiden größen $\sum_{\mu=0}^{3} J_\mu J_\mu$ und $\sum_{\mu=0}^{3} J^\mu J^\mu$. (*2 Punkte*)

Aufgabe 8: Transformation elektromagnetischer Felder

In TP2 haben wir den elektromagnetischen Vierertensor

$$[F^{\mu\nu}] \equiv \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{E}_x/c & -\mathcal{E}_y/c & -\mathcal{E}_z/c \\ \mathcal{E}_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ \mathcal{E}_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ \mathcal{E}_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

kennengelernt. Einer der Eigenschaften von $[F^{\mu\nu}]$ ist, das man sehr leicht die lorentztransformierten Komponenten berechenen kann. Falls S und S' wieder zwei Inertialsysteme in Standardkonfiguration darstellt (also unbeschleunigte Bewegung in x-Richtung), dann gilt mit $x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

$$F'^{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}. \tag{23}$$

Wir können nun die Minkoski-Feldmetrik benutzen, um einen gemischten Feldtensor zu erhalten

$$F^\mu{}_\beta = \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\beta\nu} F^{\mu\nu} \tag{24}$$

und erneute Anwendung liefert

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=0}^{3} \eta_{\alpha\mu} F^\mu{}_\beta. \tag{25}$$

Analog zu Gl. (23) gilt

$$F'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} (\Lambda^{-1})_\alpha{}^\mu (\Lambda^{-1})_\beta{}^\nu F_{\mu\nu}. \tag{26}$$

a) Berechnen Sie $F_{\mu\nu}$ explizit, d.h. unter Verwendung von Gl. (24) und (25). (*3 Punkte*)

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Gl. (23), dass für zwei Inertialsysteme in Standardkonfiguration, welche durch eine Lorentztransformation $[\Lambda^\mu{}_\nu]$ miteinander verbunden sind, $\mathcal{E}'_x = \mathcal{E}_x$ gilt. (*3 Punkte*)

Aufgabe 9: Vierertensoren

Bisher haben wir nur Vierertensoren betrachtet. Sie sind allerdings nur ein Spezialfall, und Tensoren höherer Dimension sind essentiell für die ART.

Den eben behandelten Vierertensor $[F^{\mu\nu}]$ ist ein Tensor mit Rang zwei. Es ist äußerst leicht Vierertensoren mit anderem Rang auzuschreiben, so ist ein Vierertensor m-ten Ranges gegeben durch 4^m Komponenten welche sich gemäß

$$T'^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m} = \sum_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m=0}^{3} \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2} \ldots \Lambda^{\mu_m}{}_{\nu_m} T^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} \tag{27}$$

transformieren. Entsprechend transformiert sich der kovariante Vierertensor von Rang n gemäß

$$T'_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} = \sum_{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n=0}^{3} (\Lambda^{-1})_{\alpha_1}{}^{\beta_1}(\Lambda^{-1})_{\alpha_2}{}^{\beta_2}...(\Lambda^{-1})_{\alpha_n}{}^{\beta_n}T_{\beta_1\beta_2...\beta_n}. \tag{28}$$

Was, wenn sich S und S' nicht in Standardkonfiguration befinden? (Standardkonfiguration bedeuted für die Lorentztransformation, dass $\Lambda^0{}_0 = \gamma(v), \Lambda^0{}_1 = -\gamma(v)v/c, \Lambda^1{}_0 = -\gamma(v)v/c$ und $\Lambda^1{}_1 = \gamma(v)$) - Ein Beispiel für eine nicht-Standardkonfiguration wäre z.B., dass die Koordinatenachsen nicht in die gleichen Richtungen zeigen, oder dass der Ursprung von S' niemals den von S schneidet.

Die gestrichenen Koordinaten müssen lineare Funktionen der ungestrichenen Koordinaten sein. Deshalb lassen sich die Konstanten welche die Lorentztransformation beschreiben (die Analoga zu $\gamma(v)$ und $\gamma(v)v/c$ für den nicht-Standartkonfiguration-Fall), als partielle Ableitungen der Koordinaten schreiben

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \tag{29}$$

und

$$(\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \tag{30}$$

a) Wie transormiert sich ein gemischter Vierertensor $T'^{\mu_1\mu_2...\mu_m}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$ mit kontravariantem Rang m und kovariantem Rang n unter einer Lorentztransformation in Standartkonfiguration? (*2 Punkte*)

b) Wie sieht $T'^{\mu_1\mu_2...\mu_m}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$ gemäß Gl. (29) und (30) für eine allgemeiner Lorentztransformation aus? (*1 Punkt*)

c) Ihnen wurde gesagt, dass das 256-Komponentige Monstrum $[H_{\mu\nu\rho\eta}]$ mit Elementen $H_{\mu\nu\rho\eta}$ ein kovarianter Tensor von Rang vier darstellt. Wie transformieren sich seine Komponenten von S in S' unter einer Lorentztransformation? (*2 Punkte*)