Theoretische Physik V

SS 2016 **18.07.2016**
Blatt 14 **Fälligkeitsdatum 25.07.2016**

Aufgabe 1: Kontraktion oder Diletation?

Ein Klingonenkadett-Neuling untersucht die Lorentz Transformationen

$$\begin{aligned} x' =&\gamma(x - vt) \\ t' =&\gamma(t - vx/c^2). \end{aligned}$$

Er findet heraus, dass die Längenintervalle in zwei Ineratialsysteme durch $L' = \sqrt{1-(v/c)^2}L$ miteinander verbunden sind. Dies veranlasst ihn zu dem Schluss, dass Raumschiffe größer erscheinen, wenn sie in Bewegung sind. Er führt ein Beispiel an, bei welchem ein Klingonenschiff der *B'rel*-Klasse, welches ruhend 160m misst, 1000m erscheint, wenn es sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit v entlang den Feindeslinien bewegt.

a) Der unerfahrene Kadett hat einen für uns typischen Fehler gemacht, der Folge unser nicht-relativistischen Intuition ist. Welchen?

b) Helfen Sie dem jungen Kadett, die richtige Formel für die Längenänderung zu finden.

c) Was ist die korrekte Antwort für die Länge des *B'rel*-Schiffs unter der Geschwindigkeit welche der Kadett in seinem Beispiel angenommen hatte?

QaghmeylIj tIchlD, yIyoH

Aufgabe 2: Schrödinger-Pauli Gleichungen

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, wie der Term der die Wechselwirkung eines Elektrons mit einem Magnetfeld beschreibt aus der Driacgleichung folgt.

a) Einfachheitshalber wird ein zeitunabhängiges Vektorpotential $\mathbf{A}$ angenommen. Geben Sie die stationäre Version der Diracschen Gleichung in Gegenwart eines elektromagnetischen Feldes in Abhängigkeit von $\mathbf{A}$ und φ und als gekoppelten Satz von Gleichungen für den Elektornen-Anteil Ψ_A und Postronen-Anteil Ψ_B des Bispinor Ψ. Eliminieren Sie Ψ_B von den Gleichungen.

b) Nutzen Sie nun, dass sowohl die nicht-relativistische Energie $E_{nr} = E - mc^2$ als auch $e\varphi$ viel kleiner sind als mc^2. Schreiben Sie dann die Gleichungen für Ψ_A in Abhängigkeit von E_{nr} anstelle von E um, was mc^2 in der Gleichung zu der gewichtigsten Größe der Gleichung macht. Entwickeln Sie den Bruch welcher E_{nr} im Nenner beherbergt in erster Ordnung $\mathcal{O}(v^2/c^2)$.

c) Betrachten Sie nun nur die Terme in 0. Ordnung und zeigen Sie, dass für diese die Gleichung für Ψ_A nun gegeben ist durch

$$\left\{\frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m}\hat{\sigma}\mathbf{B} + e\varphi\right\}\Psi_A = E_{nr}\Psi_A.$$

Hinweis: $(\sigma\mathbf{A})(\sigma\mathbf{B}) = \mathbf{AB} + i\sigma(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$.

Aufgabe 3: Spin-Orbital Wechselwirkung

Wenn man in vorheriger Aufgabe Korrekturen der nächst höheren Ordnung mit einbezieht, findet man unter anderem einen Term im Hamilton welcher die Spin-Orbital Wechselwirkung beschreibt. Wir möchten diesen Term nun aus der Diracgleichung herleiten.

a) Schreiben Sie die entkoppelte Diracgleichung für Ψ_A, wobei Sie den nächst höheren Term aus der Entwicklung von 2.b) nun beibehalten. Zur Vereinfachung sei $\mathbf{A} = 0$.

Es gibt nun mehrere Schwierigkeiten bei diesem Ausdruck. Eine davon ist, dass die resultierende Funktion Ψ_A bzw. Ψ_B nun nicht mehr normiert ist. Der Grund dafür ist, wir in Korrekturen zu Ψ_A in Ordnung $(v)c)^2$ interessiert waren und dabei ganz vergessen haben, dass Ψ_B von Ordnung $(v/c)\Psi_A$ ist. Deshalb wird die Normierungsbedingung $\int d\mathbf{r}|\Psi(\mathbf{r})| = 1$ zu

$$1 = \int d\mathbf{r}[\Psi_A^\dagger(\mathbf{r})\Psi_A(\mathbf{r}) + \Psi_B^\dagger(\mathbf{r})\Psi_B(\mathbf{r})] \approx \int d\mathbf{r}\Psi_A(\mathbf{r})(1 + \hat{p}^2/(4m^2c^4))\Psi_A(\mathbf{r}).$$

b) Wir führen nun einen reskalierten zweikomponentigen Spinor $\Psi = \hat{A}\Psi_A$ ein. Wie muss $\hat{A}$ lauten damit dieser Spinor normiert ist?

c) Schreiben Sie die Gleichung die Sie in a) gefunden haben. Diese beinhaltet noch E_{nr} auf beiden Seiten. Um diese Gleichung als $\hat{H}\Psi = E_{nr}\Psi$ schreiben zu können, multiplizieren Sie sie mit $\hat{A}^{-1}$ auf beiden Seiten. Behalten Sie nur Terme bis zur Ordnung $(v/c)^2$ bei.

d) Zeigen Sie, dass

$$\hat{p}^2\varphi = \hbar(\nabla\mathbf{E}) + 2i\hbar\mathbf{E}\hat{\mathbf{p}} + \varphi\hat{p}^2.$$

und dass

$$(\sigma\hat{\mathbf{p}})\varphi(\sigma\hat{\mathbf{p}}) = -\hbar\sigma(\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{p}}) + i\hbar\mathbf{E}\hat{\mathbf{p}} + \phi\hat{p}^2.$$

e) Zeigen Sie damit, dass die in c) gefundene Gleichung geschrieben werden kann als

$$\left\{\frac{\hat{p}^2}{2m} + e\varphi - \frac{\hat{p}^4}{8m^3c^2} - \frac{e\hbar\sigma(\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{p}})}{4m^2c^2} - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}(\nabla\mathbf{E})\right\}\Psi = E_{nr}\Psi.$$

Der dritte Term beschreibt die Spin-Orbit Kopplung (der Vierte ist der sogenannte Darwin-Term).

f) Worin liegt die Bedeutung des dritten Terms?