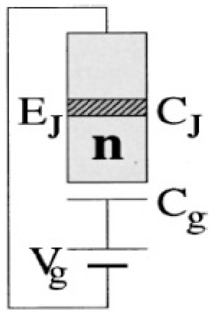
Theoretische Physik V

SS 2016 **27.06.2016**
Blatt 11 **Fälligkeitsdatum 04.07.2016**

Aufgabe 1: Cooper-Paar Box I

In dieser Aufgabe soll Stück für Stück der Hamiltonoperator für eine einzelne Cooper-Paar Box (CPB) hergeleitet werden. Er beschreibt ein sogenanntes *charge qubit* (ein qubit ist das quantenmechanische Analogon zum klassischen Bit), einer der drei qubit-Typen welche Anwendung in supraleitenden Quantencomputern finden.



Die CPB ist charakterisiert durch die Kapazitäten der Josepson-Junction C_J (ein nichtlineares Bauelement) und der Kapazität C_g welche die Kopplung mit der Spannungsquelle beschreibt, sowie der Gate-Spannung V_g und Josephson-Energie E_J (siehe obere Abbildung). Der Lagrangeoperator der CPB kann analog zu letztem Übungsblatt hergeleitet werden und ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{C_J \dot{\Phi}_J^2}{2} + \frac{C_g(\dot{\Phi}_J - V_g)^2}{2} + E_J \cos(2\pi\Phi_J/\Phi_0), \tag{1}$$

mit $E_J = I_c\Phi_0/(2\pi)$, wobei I_c der kritische Strom durch die Josephson-Junction und $\Phi_0 = h/(2e)$ das magnetische Flussquant ist.

a) Bestimmen Sie den konjugierten Impuls

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_J}. \tag{2}$$

(*1 Punkt*)

b) Wie lautet der Hamiltonoperator

$$H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_J}\dot{\Phi}_J - \mathcal{L} \tag{3}$$

in den konjugierten Variablen (p, Φ_J)? (*2 Punkte*)

c) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator durch $\hat{n} \equiv \hat{p}/(2e)$, $n_g \equiv C_g V_g/(2e)$ und der Coulomb-Energie $E_C = e^2/(2(C_g + C_J))$ eines einzelnen Elektrons in der Box geschrieben werden kann als

$$H = 4E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos(2\pi\Phi_J/\Phi_0). \tag{4}$$

(*3 Punkte*)

Wie beim LC-Oszillator auf vorangegangenem Übungsblatt kann auch hier der Hamilton quantisiert werden. Dies geschieht dadurch, dass n und Φ_J zu Operatoren erhoben werden, welche die kanonische Kommutatorrelation

$$[\hat{\Phi}_J, \hat{n}] = i\hbar/(2e) \tag{5}$$

erfüllen.

d) Beweisen Sie, dass für die kanonischen Operatoren

$$\hat{n}(\hat{\Phi}_J)^m = (\hat{\Phi}_J)^m \hat{n} - \frac{im\hbar}{2e}(\hat{\Phi}_J)^{m-1} \tag{6}$$

gilt, wobei $m \in \mathbb{N}$. (*1 Punkt*)

e) Zeigen Sie, dass in der Ladungs-Basis

$$\hat{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle\,, \tag{7}$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$, folgende Relation gilt

$$\exp(\pm 2\pi i \hat{\Phi}_J/\Phi_0)\,|n\rangle = |n \pm 1\rangle\,. \tag{8}$$

(*4 Punkte*)

f) Zeigen Sie, dass der quantisierte Hamilton der CPB mit $\hat{n} = \sum_n n\,|n\rangle\langle n|$ und $\mathbb{1} = \sum_n |n\rangle\langle n|$ geschrieben werden kann als

$$H = \sum_n \left(4E_C(n-n_g)^2\,|n\rangle\langle n| - \frac{1}{2}E_J(|n\rangle\langle n-1| + |n\rangle\langle n+1|)\right). \tag{9}$$

(*4 Punkte*)

Aufgabe 2: Cooper-Paar Box II

Wir betrachten den CPB Hamiltonian aus Gl. (9) in einer leicht abgeänderten Form

$$H = E_C(\hat{n} - n_0)^2 + \frac{E_J}{2}\sum_n(|n\rangle\langle n+1| + |n\rangle\langle n-1|). \tag{10}$$

a) Nehmen Sie an, dass $E_C \gg E_J$ und behandeln sie die Nebendiagonalelemnte als Störung des Hamiltons $H_0 = E_C(\hat{n} - n_g)^2$. Wie lauten dann die Eigenzustände des ungestörten Hamiltons? Skizzieren Sie das Spektrum von H_0 als eine Funktion von n_0. (*2 Punkte*)

Eine kleiner, jedoch nicht-verschwindender Beitrag durch die Josephson Energie E_J führt zu einer Kopplung zwischen unterschiedlichen Ladungszuständen $|n\rangle$. Wir betrachten hier nur die niedrigste Kreuzung bei $n_0 = 0$, wobei hier nur die Zustände $|-1\rangle$ und $|1\rangle$ involviert sind. Jedoch Koppeln diese beiden Zustände nicht direkt, sondern nur indirekt über den Zustand $|0\rangle$ miteinander. Deshalb müssen wir tatsächlich alle drei Zustände $|-1\rangle, |0\rangle$ und $|1\rangle$ betrachten.

b) Im 3x3 Unterraum, der durch diese drei Zustände aufgespannt wird, wie lauten die durch die Störung herbeigeführten Korrekturen 1. Ordnung für die Zustände $|-1\rangle$ und $|1\rangle$? (*3 Punkte*)

c) Geben Sie einen effektiven Hamiltonoperator H_{eff} im 2x2 Unterraum welcher von $|-1\rangle$ und $|1\rangle$ aufgespannt wird an, welcher die indirekte Kopplung über $|0\rangle$ berücksichtigt. (*3 Punkte*)

d) Auf Grund der Kopplung über $|0\rangle$ wird die Kreuzung der beiden Zustände $|-1\rangle$ und $|1\rangle$ eine sogenannte Anti-Kreuzung. Wie lauten die exakten Eigenzustände von H_{eff} an dem Punkt $n_0 = 0$? Wie lauten deren Eigenenergien? (*2 Punkte*)

Aufgabe 3: Displacement- und Squeezing-Operatoren

Die Aufgrund ihrer Effekte auf die quasi-Wahrscheinlichkeitsdichten im Phasenraum als Displacement- und Squeezing-Operator bezeichneten Operatoren

$$\hat{D}(\alpha) \equiv \exp\left(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}\right) \tag{11}$$

$$\hat{S}(z) \equiv \exp\left(1/2(z^* \hat{a}^2 - z(\hat{a}^\dagger)^2)\right) \tag{12}$$

mit $z = re^{i\theta}$ und bosonischen Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$.

a) Zeigen Sie, dass wenn $\hat{D}(\alpha)$ auf den Vakuumzustand wirkt, ein kohärenter Zustand entsteht

$$\hat{D}(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle \,. \tag{13}$$

(*2 Punkte*)

b) Zeigen Sie, dass

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha. \tag{14}$$

(*2 Punkte*)

c) Nehmen Sie an, dass $|\Psi\rangle$ ein kohärenter Zustand ist, d.h. $\hat{a}|\Psi\rangle = \lambda |\Psi\rangle$. Zeigen Sie, dass

$$\hat{a}\hat{D}(\alpha) |\Psi\rangle = (\lambda + \alpha) |\Psi\rangle \,. \tag{15}$$

(*2 Punkte*)

d) Für den Hamiltonoperator eines harmonischen Oszillators, $\hat{H} = 1/2(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{x}^2)$ sei nun zu zeigen, dass der Operator $\hat{T}_{\mathbf{a}} = \exp(-i/\hbar \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{p}})$ ein Displacement-Operator ist, welcher die Wellenfunktion um $\mathbf{a}$ verschiebt,

$$\hat{T}_{\mathbf{a}} \Psi(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}). \tag{16}$$

(*3 Punkte*)

e) Wie wirkt $\hat{D}(\alpha)$ auf einen kohärenten Zustand eines harmonischen Oszillators, welcher durch x_0 und p_0 charakterisiert ist, falls α rein imaginär ist? (*2 Punkte*)

Hinweis: $\Psi(x) = 1/(\sqrt{\sigma\sqrt{2\pi}}) \exp(-(x - x_0)^2/(4\sigma^2) + ip_0 x/\hbar)$.

f) Angenommen $|\Psi\rangle$ ist ein kohärenter Zustand mit $\hat{a}|\Psi\rangle = \lambda |\Psi\rangle$. Wir wissen, dass die dimensionslosen konjugierten Variablen $\hat{P} = i/\sqrt{2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ und $\hat{Q} = 1/\sqrt{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ eine minimale Unschärfe $(\Delta P)^2(\Delta Q)^2 = 1/2$ in diesem Zustand besitzen. Berechnen Sie $(\Delta P)^2(\Delta Q)^2$ nachdem der Squeezing-Operator auf den kohärenten Zustand gewirkt hat, für den Zustand $|\Psi_r\rangle = \hat{S}(r) |\Psi\rangle$. (*4 Punkte*)