Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten
Übungsblatt 1

Dr. Ferdi Schank
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2016 **21.04.2016**

Aufgabe 1: Diracsche δ-Distribution (15 Punkte)

Die übliche, saloppe Aussage

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ist keine sinnvolle Definition einer integrierbaren Funktion. Um die δ-Distribution sinnvoll zu definieren benutzt man Funktionenfolgen, deren Integrale die definierenden Eigenschaften der δ-Distribution zu approximieren.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Funktionenfolgen die definierende Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) f(x) = f(0) \tag{2}$$

annähert. Nehmen Sie im zweiten Fall dazu an, dass die Ableitung der Funktion f beschränkt ist.

- $\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2} & |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$ (*5 Punkte*)
- $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$ (*7 Punkte*)

Hinweis: Benutzen Sie die Mittelwertsätze der Integral- und Differentialrechnung.

(b) Zeigen Sie, dass $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ gilt. (*1 Punkt*)

(c) Zeigen Sie mit der Funktionenfolge $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$, $n = 1, 2, 3, ...$, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x} f(x)\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} \tag{3}$$

gilt, falls

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) f(x) = 0 \tag{4}$$

gilt. (*2 Punkte*)

Aufgabe 2: Fourier-Transformation (20 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+ikx}.$$

(2 Punkte)

(b) Die Fourier Transformation $\tilde{\phi}(\omega)$ von der Funktion $\phi(t)$ ist definiert als

$$\tilde{\phi}(\omega) \equiv \mathcal{F}[\phi(t)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \phi(t)$$

und die inverse Fourier-Transformation $\tilde{\tilde{\phi}}(t)$ von der Funktion $\tilde{\phi}(\omega)$ ist

$$\tilde{\tilde{\phi}}(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\phi}(\omega)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega).$$

Zeigen Sie, dass die Fouriermoden vollständing sind. Dies bedeutet, dass $\phi(t)$ als

$$\phi(t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\phi}(\omega)]$$

mit den Faktoren $\tilde{\phi}(\omega) = \mathcal{F}[\phi(t)]$ entwickelt werden kann. Das ist äquivalent zu $\tilde{\tilde{\phi}}(t) = \phi(t)$ — dies kann nicht als gegeben angenommen werden sondern muss ebenfalls gezeigt werden. *Hinweis: Nutzen Sie a) um zu zeigen dass,* $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} = \delta(t)$ *was Sie nicht als gegeben annehmen sollten.* *(7 Punkte)*

(c) Beweisen Sie den Satz von Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |\phi(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\tilde{\phi}(\omega)|^2.$$

Dies zeigt, dass die Energie der über die Zeit summierten Wellenform $\phi(t)$ gleich der Energie der über die Frequenz summierten Fourierkomponenten ist. *(4 Punkte)*

(d) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\partial_\omega \tilde{\phi}(\omega)] &= it\phi(t), \\ \mathcal{F}[\partial_t \phi(t)] &= -i\omega\phi(\omega). \end{aligned}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3: Bohr-Sommerfeld-Quantisierung (20 Punkte)

Das Bohrsche Atommodell ist ein semiklassisches Atommodell und stellt einen Vorläufer der Quantenmechanik dar. Innerhalb des Modells ist der Impuls gemäß der Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsbedingung

$$\oint p(q)\mathrm{d}q \ = 2\pi n\hbar \tag{5}$$

für periodische Bewegungen gequantelt. Dabei ist q eine generalisierte Koordinate des Systems und p der dazu kanonisch konjugierte Impuls. Für eine gegebene Bahn des Systems im Phasenraum (das ist hier die qp-Ebene) wird p eine Funktion von q.
In dieser Aufgabe soll die Bedingung 5 auf einige einfache, klassische Systeme angewandt werden. Das Bohrsche Atommodell ist zwar keine gute Beschreibung für diese Systeme. Dennoch ist die Aufgabe eine gute Rechenübung.

(a) Bestimmen Sie für ein Teilchen mit Masse m im Potential $V(x) = A|x|$ die Energie H_n des Systems in Abhängigkeit von der Quantenzahl n. Verwenden Sie dazu die Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsbedingung 5. Skizzieren Sie die Phasenraumtrajektorie des Systems. Das hilft beim Finden der Integrationsgrenzen für das Kurvenintegral. (*5 Punkte*)

(b) Ein kräftefreies Teilchen der Masse m bewegt sich in einer eindimensionalen Box des Volumens L und wird an den Wänden vollständig elastisch reflektiert. Bestimmen Sie die Energie H_n des Systems. Skizzieren Sie auch hier die Phasenraumtrajektorie des Systems. (*5 Punkte*)

(c) Eine starre Hantel mit dem Trägheitsmoment I rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um ihren Schwerpunkt. Bestimmen Sie die Energie H_n des Systems. Wie muss man hier die Phasenraumtrajektorie des Systems darstellen? (*5 Punkte*)

(d) Die Erde bewegt sich näherungsweise auf einer stationären Kreisbahn um die Sonne. Geben sie auch hier die Energie des Systems H_n an und berechnen Sie näherungsweise die *Quantenzahl der Erde.* (*5 Punkte*)