Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten
Übungsblatt 10

Dr. Ferdi Schank
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2016 **21.06.2016**

Aufgabe 1: QM-Zweikörperproblem (9 Punkte)

Betrachten Sie das Wasserstoffatom beschrieben durch den Zweikörper-Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\underline{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\underline{p}}_2^2}{2m_2} + \hat{V}(|\hat{\underline{r}}_1 - \hat{\underline{r}}_2|)\,.$$

Aufgrund der Abhängigkeit des Potenzials von $\hat{\underline{r}}_1 - \hat{\underline{r}}_2$ lässt sich das Problem besser durch die Schwerpunkts- und die Relativkoordinaten beschreiben.

a) Sei $\hat{\underline{r}}_+ = (m_1\hat{\underline{r}}_1 + m_2\hat{\underline{r}}_2)/M$ und $\hat{\underline{r}}_- = \hat{\underline{r}}_1 - \hat{\underline{r}}_2$, wobei $M = m_1 + m_2$ ist. Bestimmen Sie die zugehörigen Impulse $\hat{\underline{p}}_+$ und $\hat{\underline{p}}_-$, sodass die üblichen Kommutatorbeziehungen $[\hat{r}_{\pm,i}, \hat{p}_{\pm,j}] = i\hbar\delta_{ij}$, $[\hat{p}_{\pm,i}, \hat{p}_{\mp,j}] = 0$ und $[\hat{r}_{\pm,i}, \hat{p}_{\mp,j}] = 0$ gelten. Prüfen Sie, ob die gefundenen $\hat{\underline{p}}_\pm$ gleich den klassischen Impulsen $\underline{p}_{\pm,\text{kl.}}$ sind. *(4 Punkte)*

b) Drücken Sie $\hat{H}$ durch die neuen Koordinaten aus und zeigen Sie, dass die + und − Koordinaten entkoppelt sind. *(5 Punkte)*

Aufgabe 2: Magnetisches Moment (13 Punkte)

a) In der Vorlesung haben Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\underline{j} = \frac{\hbar}{2m_0 i}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$$

für das Wasserstoffatom hergeleitet. Berechnen Sie die Komponenten j_r, j_θ und j_ϕ in Kugelkoordinaten. *(6 Punkte)*

b) Es sei e die Elementarladung. Berechnen Sie die elektrische Stromdichte $\underline{J} = -e\cdot\underline{j}$. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass für die Magnetisierung $\underline{M}$, definiert durch

$$\underline{M} = \frac{1}{2c}\left(\underline{r}\times\underline{J}\right),$$

gilt:

$$\underline{M} = \frac{1}{2c}\cdot\frac{em\hbar|\psi|^2}{m_0\sin(\theta)}\cdot\underline{e}_\theta.$$

(2 Punkte)

d) Berechnen Sie das magnetische Moment $\underline{m}$ aus der Magnetisierung $\underline{M}$. *(2 Punkte)*

e) Diskutieren Sie den Fall, dass die Drehimpulsquantenzahl l den Wert 0 hat. *(1 Punkt)*

f) Experimentell stellt sich heraus, dass $m_z \neq 0$ gilt. Auf welches physikalische Prinzip deutet dies hin? *(1 Punkt)*

Aufgabe 3: Drehimpuls einer Wellenfunktion (18 Punkte)

Betrachten Sie ein spinloses Teilchen, welches durch die Wellenfunktion

$$\psi(x, y, z) = K(x + y + 2z)e^{-\alpha r}$$

beschrieben wird. Hierbei ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, K und α sind Konstanten.

a) Formulieren Sie die Wellenfunktion in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ). Separieren Sie den Radialanteil und den Winkelanteil $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Phi(\theta, \phi)$ und normieren Sie den Winkelanteil $\Phi(\theta, \phi)$. Stellen Sie dann den Winkelanteil als Linearkombination von Kugelflächenfunktionen dar. *(10 Punkte)*

b) Was ist der Gesamtdrehimpuls des Systems in diesem Zustand? *(2 Punkte)*

c) Was ist der Erwartungswert der z-Komponente des Drehimpulses in diesem Zustand? *(2 Punkte)*

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt die Messung der z-Komponente des Drehimpulses $\hat{L}_z$ den Wert $\hbar$? *(2 Punkte)*

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden wir das Teilchen im Raumwinkel $d\Omega(\theta, \phi)$? *(2 Punkte)*

Hinweis: Möglicherweise sind folgende Kugelflächenfunktionen von Nutzen:

$$\begin{aligned}
Y_0^0 &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\
Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta) \\
Y_1^{\pm 1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)e^{\pm i\phi} \\
Y_2^{\pm 1} &= \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin(\theta)\cos(\theta)e^{\pm i\phi}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Laguerrepolynome Teil 1 (10 Punkte)

Diese Übung zeigt, wie man den Radialteil der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms erhält.

a) In kugelsymmetrischen Systemen können die Energieeigenzustände durch die Produktform $\psi(\mathbf{r}) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi)$ ausgedrückt werden. Für den Radialteil ergibt die Schrödingergleichung

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)R(r) = \frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\left[V(r) - E\right] + l(l+1)\,. \tag{1}$$

Hierbei ist μ die Masse, l die Nebenquantenzahl und r ist die Radialkoordinate. Zeigen Sie, dass für das Wasserstoffatom mit dem Potenzial $V(r) = -\frac{e^2}{r}$ die Gleichung (1) gleichbedeutend ist mit

$$\frac{d^2y(r)}{dr^2} + \left[\frac{2\mu e^2}{r\hbar^2} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]y(r) = 0\,, \tag{2}$$

wobei $y(r) = rR(r)$. *(5 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass Gleichung (2) gleichbedeutend ist mit

$$\frac{d^2y_j^k(x)}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{2j+k+1}{2x} - \frac{k^2-1}{4x^2}\right)y_j^k(x) = 0\,. \tag{3}$$

Dabei wurden die Substitutionen $x = r\epsilon$, $\epsilon^2/4 = -2\mu E/\hbar^2$, $k^2-1 = 4l(l+1)$ und $2\mu e^2/(\hbar^2\epsilon) = (2j+k+1)/2$ durchgeführt. y wird nun mit j und k indiziert. Diese Gleichung ist einfacher zu lösen als Gleichung (1). *(5 Punkte)*