Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten
Übungsblatt 11

Dr. Ferdi Schank
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2016 **28.06.2016**

Aufgabe 1: Eigenzustände eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators (13 Punkte)

Betrachten Sie zur Wiederholung den zweidimensionalen harmonischen Oszillators mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2).$$

Dieser ist äquivalent zu

$$\hat{H} = (\hat{n}_x + \hat{n}_y + 1)\,\hbar\omega, \quad \hat{n}_x = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x, \quad \hat{n}_y = \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y.$$

a) Drücken Sie den Operator der z-Komponente des Drehimpulses $\hat{L}_z \equiv \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ als Funktion von $\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger$ aus. Benutzen Sie die Kommutatoren für $\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger$ und zeigen Sie, dass $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ eine gemeinsamen Satz simultaner Eigenvektoren haben. *(4 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator durch

$$\hat{H} = (\hat{n}_d + \hat{n}_g + 1)\,\hbar\omega \text{ mit}$$
$$\hat{n}_d = \hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d, \quad \hat{n}_g = \hat{a}_g^\dagger \hat{a}_g, \quad \hat{a}_g = (\hat{a}_x - i\hat{a}_y)/\sqrt{2}, \quad \hat{a}_d = (\hat{a}_x + i\hat{a}_y)/\sqrt{2}$$

ausgedrückt werden kann. Schreiben Sie $\hat{L}_z$ in Bezug auf $\hat{n}_d$ und $\hat{n}_g$. *(6 Punkte)*

c) Die Quantenzahlen des Systems werden so gewählt, dass die Eigenwerte von $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ die Form $(n+1)\hbar\omega$ und $m\hbar$ annehmen. Die gleichzeitigen Eigenzustände von $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ können durch $|n_d, n_g\rangle$ ausgedrückt werden. Was sind n_d und n_g in Bezug auf n and m? Bestimmt die Quantenzahl n den Zustand des Systems vollständig? Können n und m den Zustand vollständig bestimmen? *(2 Punkte)*

d) Der n-te Eigenzustand von $\hat{H}$ ist $n+1$-fach entartet. Wenn die Energie des System $(n+1)\hbar\omega$ ist, was sind dann die möglichen Werte für (n_d, n_g)? Was sind die möglichen Werte von m? *(1 Punkt)*

Aufgabe 2: Asymmetrischer Potentialtopf (12 Punkte)

Diese Aufgabe dient zur Wiederholung bereits bekannter Konzepte. Betrachten Sie den asymmetrischen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \leq 0 \\ -V_0 & \text{für } 0 < x < a \\ 0 & \text{für } x \geq a, \end{cases}$$

mit $a > 0$. Skizzieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens. Welche Bedingung muss gelten, damit mindestens ein gebundener Zustand existiert? *(12 Punkte)*

Aufgabe 3: Laguerrepolynome Teil 2 (25 Punkte)

Diese Aufgabe vervollständigt Übungsblatt 9, Aufgabe 4. Dort haben Sie gezeigt, dass, mit Hilfe von ein paar Substitutionen, die Gleichung

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)R(r) = \frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\left[V(r)-E\right] + l(l+1) \tag{1}$$

für das Wasserstoffatom mit dem Potenzial $V(r) = -\frac{e^2}{r}$ auf die Form

$$\frac{d^2 y_j^k(x)}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{2j+k+1}{2x} - \frac{k^2-1}{4x^2}\right) y_j^k(x) = 0\,. \tag{2}$$

gebracht werden kann.

a) Laguerrepolynome können aus Rodrigues' Formel (für Laguerrepolynome)

$$L_j(x) = e^x \frac{d^j}{dx^j}(e^{-x}x^j) \tag{3}$$

entwickelt werden. Zeigen Sie, dass die Polynome $L_j(x)$, gegeben durch (3), die Laguerregleichung

$$x\frac{d^2 L_j(x)}{dx^2} + (1-x)\frac{dL_j(x)}{dx} + jL_j(x) = 0 \tag{4}$$

erfüllen.
Hinweis: durch die Ableitung von $g_j \equiv e^{-x}x^j$ kann gezeigt werden, dass

$$x\frac{dg_j}{dx} = (j-x)g_j \tag{5}$$

gilt. Leiten Sie Gleichung (5) $j+1$ mal ab und seien Sie dabei vorsichtig bei Verwendung der Produktregel. Mit der Subsitution $L_j = e^x \frac{d^j g_j}{dx^j}$ in Gleichung (4) können die Ausdrücke umgeordnet werden um die Äquivalenz der beiden Gleichungen zu zeigen. (*7 Punkte*)

b) Die zugehörigen Laguerrepolynome können mit Hilfe der Laguerrepolynome [ausgedrückt durch Gleichung (3)] durch eine Erzeugendenfunktion berechnet werden

$$L_j^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{j+k}(x)\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass die Polynome $L_j^k(x)$ die Laguerregleichung

$$x\frac{d^2 L_j^k(x)}{dx^2} + (1-x+k)\frac{dL_j^k(x)}{dx} + jL_j^k(x) = 0 \tag{7}$$

erfüllen.
Hinweis: Betrachten Sie Gl. (4) mit $j \to j+k$ und leiten Sie k-mal ab. (*7 Punkte*)

c) Zeigen Sie, dass

$$y_j^k(x) \equiv e^{-x/2}x^{(k+1)/2}L_j^k(x), \tag{8}$$

manchmal auch als zugehörige Laguerrefunktion bezeichnet, Gl. (2) erfüllt.
Hinweis: Substituieren Sie Gl. (8) in Gl. (2), berechnen Sie die Ableitung und vereinfachen Sie das Ergebnis. Dies liefert die zugehörige Laguerregleichung [Gl. (7)]. Aus b) ist bekannt, dass L_j^k Gl. (7) erfüllt. (*7 Punkte*)

d) In Bezug auf die ursprünglichen Variablen aus a) gilt

$$x = \frac{2r}{na_0}, \quad \frac{k+1}{2} = l+1, \quad k = 2l+1, \quad j = n-l-1, \quad R(r) = \frac{y(r)}{r}\,, \tag{9}$$

wobei $a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} = 0.529 \times 10^{-10}$ der Bohrsche Radius ist. Unter Verwendung von Gl. (8) und Multiplikation mit einem Normierungsfaktor (dessen Bestimmung auch die Berücksichtigung von $Y_l^m(\theta, \phi)$ erfordert) ergibt der Radialteil der Wellenfunktion

$$R_{n,l}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/na_0} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right). \tag{10}$$

Berechnen Sie den Radialteil der Wellenfunktionen $R_{1,0}(r)$, $R_{2,0}(r)$, $R_{2,1}(r)$, und $R_{3,0}(r)$. Hinweis: Benutzen Sie Gl. (3) und (6). *(4 Punkte)*