Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten
Übungsblatt 12

Dr. Ferdi Schank
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2016 **05.07.2016**

Aufgabe 1: Random Walk (14 Punkte)

Im eindimensionalen Fall besteht ein Random Walk aus N Schritten, die auf einer Geraden ausgeführt werden. Diese Gerade bezeichnen wir als x-Achse. Der Random Walk startet bei $x = 0$. Ein Schritt besteht aus einem Sprung um $\Delta x = \pm 1$. Der Sprung um $+1$ erfolgt mit der Wahrscheinlichkeit p, der um -1 mit q. Dabei gilt $p + q = 1$. Die einzelnen Schritte sind voneinander unabhängig. Die Anzahl der positiven Sprünge sei n_+, die der negativen n_-. Zusammen ergeben sie die Gesamtzahl der Schritte N.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P_N(m)$ nach N Schritten in $x = m = n_+ - n_-$ zu landen? Drücken Sie das Ergebnis sowohl als Funktion von m als auch als Funktion von $n := n_+$ aus. (*5 Punkte*)

b) Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{N} P_N(n).$$

(*1 Punkt*)

c) Für welche Werte für N und m gilt $P_N(m) = 0$? (*3 Punkte*)

d) Berechnen Sie die Mittelwerte $\bar{n}$, $\bar{m}$ und $\overline{n^2}$ sowie die Standardabweichung $\Delta n = \sqrt{\overline{n^2} - \bar{n}^2}$. (*4 Punkte*)

e) Zeigen Sie *das Gesetz der großen Zahl*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\Delta n}{\bar{n}} = 0.$$

(*1 Punkt*)

Aufgabe 2: Gammafunktion (9 Punkte)

Die allgemeine Definition der *Gammafunktion* für $x \geq 1$ lautet

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dy \; y^{x-1} e^{-y}.$$

a) Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

(*3 Punkte*)

b) Sei $f(x) := x^n e^{-x}$. Entwickeln Sie $\ln(f(x))$ in eine Taylorreihe um das Maximum der Funktion $f(x)$ herum (für $n >> 1$). Setzen Sie diese Entwicklung in das Integral ein und leiten Sie daraus die *Stirlingsche Formel*

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \qquad (n >> 1)$$

ab. Bestimmen Sie hiermit den Wert der Random-Walk-Verteilung $P_N(n)$ an der Stelle $\bar{n}$ für großes N. (*6 Punkte*)

Aufgabe 3: Liouvillegleichung (17 Punkte)

Wir betrachten ein klassisches System mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(q,p,t)$. Leiten Sie ausgehend von der Wahrscheinlichkeitserhaltung die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \underline{v}) = 0$$

her. Hierbei ist $\underline{v} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}$. Beweisen sie damit die klassische Version des Liouville-Theorems

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{H(q,p), \rho(q,p)\} = 0.$$

(*17 Punkte*)

Aufgabe 4: Volumen der n-dimensionalen Kugel (10 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen

$$V_n(R) = C_n R^n$$

einer n-dimensionalen Kugel mit dem Radius R. Zeigen Sie weiter, dass der überwiegende Anteil des Volumens einer hochdimensionalen Kugel unmittelbar unter ihrer Oberfläche liegt.
Hinweis: Gehen Sie von der Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \; \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \; \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \int_0^{\infty} dR \; A_n(R) \exp\left(-R^2\right)$$

aus. Dabei ist $R = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ der Radius und $A_n(R) = \frac{dV_n}{dR}$ die Oberfläche der betrachteten Kugel. Aus der Berechnung der beiden Seiten ergibt sich C_n. (*10 Punkte*)