

Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

Übungsblatt 14

Dr. Ferdi Schank
M.Sc. Peter Schuhmacher
SS 2016

19.07.2016

Aufgabe 1: Entropie für verschiedene Makrozustände (12 Punkte)

Die Entropie eines beliebigen Makrozustandes $\{P_r\}$ ist durch

$$S = -k_B \sum_r P_r \ln(P_r)$$

gegeben. Setzen Sie hierin die bekannten Wahrscheinlichkeiten P_r des

- (i) mikrokanonischen
- (ii) kanonischen
- (iii) großkanonischen

Ensembles ein. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

(12 Punkte)

Aufgabe 2: Wärmekapazität für N harmonische Oszillatoren (13 Punkte)

Der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}_i \right)$$

beschreibt N unabhängige Teilchen im harmonischen Oszillator. Die Teilchen haben Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T . Wie verhält sich die Wärmekapazität $C(T, N)$ für kleine und große Temperaturen?

(13 Punkte)

Aufgabe 3: Gibbs-Paradoxon (13 Punkte)

Die kanonische Zustandssumme eines idealen einatomigen Gases ist

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{\lambda^{3N}}, \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

Berechnen Sie damit die Änderung ΔF der freien Energie bei folgendem Prozess:

Ein thermisch isoliertes Gasvolumen V wird durch seitliches Einschieben einer Zwischenwand in zwei gleiche Volumina geteilt. Berechnen Sie ΔF alternativ aus thermodynamischen Relationen (betrachten Sie dazu die übertragenen Arbeits- und Wärmemengen).

Lassen Sie den Faktor $\frac{1}{N!}$ im Ausdruck für Z weg; dies ergibt einen anderen Ausdruck F^* für die freie Energie. Bestimmen Sie die Änderung ΔF^* bei dem betrachteten Prozess. Der Widerspruch zwischen diesem statistisch berechneten ΔF^* und dem thermodynamisch berechneten ΔF heißt *Gibbs-Paradoxon*. Der Widerspruch wurde durch das Einfügen des Faktors $\frac{1}{N!}$ aufgelöst, und zwar bevor die Quantenmechanik diesen Faktor begründete (Ununterscheidbarkeit von Teilchen).

Aufgabe 4: Energieschwankung im idealen Gas (12 Punkte)

In makroskopischen Systemen liegen die Mikrozustände so dicht, dass die Mittelwerte als Integrale ausgewertet werden können:

$$\bar{A} = \sum_r A_r P_r = \frac{1}{Z} \sum_r A_r \exp(-\beta E_r) = \int_0^\infty dE A(E) \omega(E) \exp(-\beta E).$$

Hierbei ist $\omega(E)$ die Dichte der Zustände. Für ein ideales Gas gilt $\omega(E) \propto E^{\frac{3N}{2}}$. Bestimmen Sie für diesen Fall die Schwankung ΔE der Energie. Entwickeln Sie dazu den Logarithmus von $\omega(E) \exp(-\beta E)$ bis zur 2. Ordnung um das Maximum herum.