Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten
Übungsblatt 3

Dr. Ferdi Schank
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2016 **03.05.2016**

Aufgabe 1: Eindimensionales Wellenpaket (10 Punkte)

Das Wellenpaket eines Teilchens in einer Dimension hat zum Zeitpunkt $t = 0$ die Form

$$\psi(x,0) = A \int_{-\infty}^{\infty} dk \; e^{-\frac{\sigma^2}{4}(k-k_0)^2} e^{ikx}.$$

Die Breite der Gaußschen Amplitudenfunktion ist definiert als $\Delta k = \frac{1}{\sigma}$.

(a) Berechnen Sie $\psi(x,0)$ explizit und bestimmen Sie die Konstante A aus der Bedingung, dass das Integral von $|\psi(x,0)|^2$ auf 1 normiert sein soll. Bestimmen Sie die entsprechende Breite Δx. *(5 Punkte)*

(b) Berechnen Sie die zeitabhängige Wellenfunktion $\psi(x,t)$ für den Fall eines freien Teilchens. Schreiben Sie den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ auf und bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit der Koordinate des Maximums x_M und der Breite Δx des Wellenpaketes. *(5 Punkte)*

Aufgabe 2: Dreidimensionaler Potentialtopf (11 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich im dreidimensionalen Potentialtopf $V(x,y,z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$, wobei $V_1(x) = V_2(x) = V_3(x) = 0$ für $|x| < \frac{a}{2}$, $|y| < \frac{b}{2}$, $|z| < \frac{c}{2}$ und $V_1(x) = V_2(x) = V_3(x) = \infty$ für $|x| > \frac{a}{2}$, $|y| > \frac{b}{2}$, $|z| > \frac{c}{2}$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass man die Lösungen der stationären Schrödingergleichung in der Form

$$\psi(x,y,z) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$$

schreiben kann und bestimmen Sie die normierten Wellenfunktionen. *(5 Punkte)*

(b) Berechnen Sie die Energieeigenwerte. *(4 Punkte)*

(c) Zeigen Sie, dass im Fall $a = b = c$ verschiedene Energieeigenfunktionen mit demselben Energieeigenwert existieren. *(2 Punkte)*

Aufgabe 3: Orts-Impuls-Unschärferelation (14 Punkte)

Bestimmen Sie die Normierungskonstanten A und B sowie die Impulsdarstellung der folgenden Wellenfunktionen:

(a) $\psi(x) = \begin{cases} A & \text{für } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{für } |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$ *(7 Punkte)*

(b) $\psi(x) = Be^{-\frac{|x|}{a}}$. *(7 Punkte)*

Benutzen Sie dazu die folgende Definition der Fourier-Transformation:

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}px}.$$

Skizzieren Sie $\psi(x)$ und $\tilde{\psi}(p)$. Berechnen Sie die zugehörigen mittleren quadratischen Abweichungen Δx und Δp und verifizieren Sie explizit die Heisenbergsche Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$.

Aufgabe 4: Knotensatz (15 Punkte)

Es seien ψ_l und ψ_{l+1} zwei Eigenfunktionen der eindimensionalen stationären Schrödingergleichung, wobei die zugehörigen diskreten Energieeigenwerte nach zunehmender Energie

$$E_0 < E_1 < E_2 < \ldots < E_l < E_{l+1} < \ldots$$

geordnet sind. Beweisen Sie, dass ψ_{l+1} zwischen zwei Nullstellen von ψ_l mindestens einen Knoten hat und daher die Funktionen

$$\psi_0 < \psi_1 < \psi_2 \ldots$$

nach wachsender Knotenzahl geordnet sind.
Hinweis: Betrachten Sie die Wronski-Determinante $W(\psi_l, \psi_{l+1}) = \psi_l \psi'_{l+1} - \psi'_l \psi_{l+1}$ und integrieren Sie deren Ableitung zwischen zwei benachbarten Nullstellen x_1 und x_2 von ψ_l.