Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten
Übungsblatt 4

Dr. Ferdi Schank
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2016 **10.05.2016**

Aufgabe 1: Periodisches Potential (12 Punkte)

Betrachten Sie ein eindimensionales System mit periodischem Potential der Periode a, das heißt

$$\hat{\mathrm{V}}(x) = \hat{\mathrm{V}}(x + na) \text{ mit } n \in \mathbb{Z}.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Translationsoperator $\hat{\mathrm{T}}_a$, definiert durch

$$\hat{\mathrm{T}}_a \psi(x) = \psi(x + a),$$

mit dem Hamiltonoperator des Systems kommutiert. (*4 Punkte*)

(b) Geben sie eine möglichst allgemeine Form für die Eigenfunktionen von $\hat{\mathrm{T}}_a$ an. (*6 Punkte*)

(c) Welchen Satz haben Sie damit hergeleitet? Wo findet dieser Satz Anwendung? (*2 Punkte*)

Aufgabe 2: Ehrenfest-Theorem (15 Punkte)

Zeigen Sie anhand des Ehrenfest-Theorems, dass für ein Teilchen im Potential $\hat{\mathrm{V}}(\underline{r})$ die Beziehungen

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \underline{\hat{\mathrm{p}}} \rangle = -\langle \nabla \hat{\mathrm{V}}(\underline{r}) \rangle$ (*7 Punkte*)

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \underline{\hat{\mathrm{L}}} \rangle = -\langle \underline{r} \times \nabla \hat{\mathrm{V}}(\underline{r}) \rangle$ (*8 Punkte*)

gelten. Hierbei bezeichnet $\underline{\hat{\mathrm{p}}}$ den Impulsoperator und $\underline{\hat{\mathrm{L}}} := \underline{r} \times \underline{\hat{\mathrm{p}}}$ den Drehimpulsoperator.

Aufgabe 3: Streuung eines Wellenpaketes an einem Stufenpotential (23 Punkte)

Betrachten Sie ein Stufenpotential $\hat{\mathrm{V}}(x) = V_0\theta(x)$ mit $V_0 > 0$ und der Heaviside-Funktion $\theta(x)$. Die Energieeigenzustände sind ebenen Wellen

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} + \frac{k-\kappa}{\sqrt{2\pi}(k+\kappa)}e^{-ikx}, & x < 0 \\ \frac{2k}{\sqrt{2\pi}(k+\kappa)}e^{i\kappa x}, & x > 0. \end{cases}$$

Statt mit ebenen Wellen wird die Wellenfunktion eines Teilchen jedoch besser durch ein Wellenpaket beschrieben. Trotzdem kann man ebene Wellen verwenden, falls das Wellenpaket größer als die anderen Längenskalen ist.

Betrachten Sie ein Gaußsches Wellenpaket, das zu Anfang um $x = -a$ im Ortsraum zentriert ist. Dessen Standardabweichung σ erfüllt $a \gg \sigma$. Im Impulsraum ist dieses Wellenpaket um $k = k_0 > \sqrt{2mV_0}$ zentriert

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}}e^{ik_0(x+a)-(x+a)^2/2\sigma^2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass im Rahmen der Näherungen $|k_0 + k| >> |k_0 - k|$, $a >> \sigma$ und $\kappa \approx k$ für dieses Wellenpaket

$$\psi(x, 0) = \int dk\ \ \psi_k(x)\mathcal{F}_k[\psi(x, 0)],$$

gilt, wobei

$$\mathcal{F}_k[\psi(x, 0)] = \left(\frac{\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{ika}e^{-(k-k_0)^2\sigma^2/2}.$$

Hinweis: Was ist das Skalarprodukt von $\psi(x, 0)$ mit den reflektierten und transmittierten Wellen? Es hilft zur Darstellung die Heaviside-Funktion $\theta(x)$ zu benutzen.
Die Näherung $|k_0 + k| >> |k_0 - k|$ hat die Konsequenz, dass für Terme der Form

$$\int dy\ \ e^{i\sigma(k_0+k)y}g(y)$$

mit einer Funktion g im Mittel verschwinden. Dies ist die sogenannte "Drehwellennäherung". (*8 Punkte*)

(b) Was bedeutet κ in der Lösung der ebenen Wellen? Zeigen Sie, dass für das einfallende Wellenpaket die reflektierte und transmittierte Welle durch

$$\psi_R(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\ \ e^{ikx}\theta(-x)\phi_R(k, t), \quad \psi_T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\ \ e^{ikx}\theta(x)\phi_T(k, t),$$

mit

$$\begin{aligned} \phi_R(k, t) &= \left(\frac{\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{k+\kappa}{k-\kappa}\right)e^{-i\hbar k^2t/2m}e^{-(k+k_0)^2\sigma^2/2}e^{-ika}, \\ \phi_T(k, t) &= \left(\frac{\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{2\sqrt{k^2 + 2mV_0/\hbar^2}}{\sqrt{k^2 + 2mV_0/\hbar^2} + k}\right)\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + 2mV_0/\hbar^2}}\right) \\ &\quad \times e^{-i\hbar(k^2+2mV_0/\hbar^2)t/2m}e^{-(\sqrt{k^2+2mV_0/\hbar^2}-k_0)^2\sigma^2/2}e^{i\sqrt{k^2+2mV_0/\hbar^2}a}. \end{aligned}$$

beschrieben werden. (*8 Punkte*)

(c) Zeigen Sie, dass der Transmissionskoeffizient T und Reflexionskoeffizent R durch

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{\sigma^2}{\pi}}\int dk\left(\frac{k-\kappa}{k+\kappa}\right)^2 e^{-(k-k_0)^2\sigma^2}, \\ T &= \sqrt{\frac{\sigma^2}{\pi}}\int dk\ \frac{\kappa}{k}\left(\frac{2k}{k+\kappa}\right)^2 e^{-(k-k_0)^2\sigma^2}. \end{aligned}$$

gegeben sind. (*7 Punkte*)