Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten
Übungsblatt 5

Dr. Ferdi Schank
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2016 **17.05.2016**

Aufgabe 1: Hermitepolynome (40 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z-\lambda) = e^{-\lambda^2+2\lambda z}$ die erzeugende Funktion der Hermitepolynome ist, d.h.

$$e^{-\lambda^2+2\lambda z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(z)\,,$$

wobei $H_0(z) = 1$, $H_1(z) = 2z$, $H_2(z) = 4z^2 - 2$ usw. .
Hinweis: Benutzen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(z-\lambda)$. (*8 Punkte*)

(b) Leiten Sie die Rekursionsbeziehung

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z), \quad n = 2, 3, \cdots$$

her.
Hinweis: Benutzen Sie die Taylorentwicklung der Ableitung von $f(z-\lambda)$ nach λ.(*8 Punkte*)

(c) Zeigen Sie die Rekursionsbeziehung

$$H_n'(z) = 2nH_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Leiten Sie danach die folgende Differentialgleichung her:

$$H_n''(z) - 2zH_n'(z) + 2nH_n(z) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Hinweis: Benutzen Sie die Taylorentwicklung der Ableitung von $f(z-\lambda)$ nach z .(*8 Punkte*)

(d) Berechnen und skizzieren Sie die ersten zwei und das sechste Hermitepolynom sowie die entsprechenden Eigenzustände $\phi_n(z)$ des harmonischen Oszillators. (*8 Punkte*)

(e) Beweisen Sie durch Induktion, dass $H_n(z)$ ein Polynom n-ter Ordung ist. Argumentieren Sie, warum die Eigenzustände $\phi_n(z)$ n Nullstellen haben. (*8 Punkte*)

Aufgabe 2: Gekoppelte Oszillatoren (10 Punkte)

Betrachten Sie zwei harmonisch gekoppelte harmonische Oszillatoren. In der Ortsdarstellung lautet der zugehörige Hamiltonoperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + gm\omega^2\left(x_1 - x_2\right)^2,$$

wobei $g > 0$ eine dimensionslose Kopplungskonstante ist.Zeigen Sie, dass durch das Einführen der Koordinaten $y = x_1 - x_2$ und $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ der Hamiltonoperator auf die Form

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 x^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\mu\Omega^2 y^2$$

gebracht werden kann. Dabei gelten $M := 2m$, $\mu := \frac{m}{2}$ und $\Omega := \sqrt{1+4g}\omega$. Transformieren Sie dazu die Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial}{\partial x_2}$ in die neuen Koordinaten (Kettenregel). Welchen Vorteil bringt die Transformation auf die neuen Koordinaten und was bedeuten diese physikalisch? (*10 Punkte*)