Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten
Übungsblatt 6

Dr. Ferdi Schank
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2016 **24.05.2016**

Aufgabe 1: Projektoren (9 Punkte)

Eine Abbildung $\hat{P}$ des Hilbertraums $\mathcal{H}$ auf den Unterraum $\mathcal{H}'$ ist genau dann eine orthogonale Projektion, wenn $\hat{P}$ hermitesch ($\hat{P}^\dagger = \hat{P}$) und idempotent ($\hat{P}^2 = \hat{P}$) ist. Sei $\hat{P}_A$ eine orthogonale Projektion auf den Unterraum $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$ und $\hat{P}_B$ eine orthogonale Projektion auf den Unterraum $\mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass die Bedingung $[\hat{P}_A, \hat{P}_B] = 0$

(a) notwendig und (*3 Punkte*)

(b) hinreichend ist, (*3 Punkte*)
damit auch $\hat{P}_A\hat{P}_B$ eine orthogonale Projektion darstellt.

(c) Auf welchen Teilraum von $\mathcal{H}$ projeziert $P_A P_B$ in diesem Fall? (*3 Punkte*)

Aufgabe 2: Eigenschaften des Hilbertraums (9 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\langle\cdot|\cdot\rangle$ das Skalarprodukt zweier Vektoren. Zeigen Sie, dass $\forall |x\rangle,\ |y\rangle \in \mathcal{H}$

(a) $|\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$ gilt (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Eine Methode hierfür ist es, eine geeignete Linearkombination $|z\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle$ zu bilden. Mit den richtigen α und β folgt das Ergebnis aus $\langle z|z\rangle \geq 0$. (*5 Punkte*)

(b) $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ eine Norm auf $\mathcal{H}$ definiert, d.h. dass $||\cdot||$ definit, absolut homogen, und subadditiv ist. (*4 Punkte*)

Aufgabe 3: Kommutatoren und Operatoralgebra (10 Punkte)

Die Matrix $\hat{\sigma}_x$ ist definiert durch $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass
$$e^{i\alpha\hat{\sigma}_x} = \mathbb{1}\cos\alpha + i\hat{\sigma}_x \sin\alpha$$
gilt, mit $\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (*3 Punkte*)

(b) Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei Operatoren, die mit $[\hat{A}, \hat{B}]$ kommutieren. Zeigen Sie
$$\left[\hat{A}, \hat{B}^n\right] = n\hat{B}^{n-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$$
$$\left[\hat{A}^n, \hat{B}\right] = n\hat{A}^{n-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right].$$
Ein Weg zur Lösung ist vollständige Induktion mit der Zerlegung $\hat{B}^n = \hat{B}\hat{B}^{n-1}$. (*4 Punkte*)

(c) Wenden Sie das vorherige Ergebnis für den Fall $\hat{A} = \hat{x}$, $\hat{B} = \hat{p}$ an und zeigen Sie, dass für eine Operatorfunktion $f(\hat{x})$, die als Potenzreihe von $\hat{x}$ entwickelt werden kann,
$$\left[\hat{p}, \hat{f}(\hat{x})\right] = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}x}$$
gilt. (*3 Punkte*)

Aufgabe 4: Erwartungswerte von Operatoren (12 Punkte)

Sei $\hat{H}$ der Hamiltonoperator eines Quantensystems mit Eigenwerten E_n und Eigenvektoren $|\psi_n\rangle$, sodass $\hat{H}\,|\psi_n\rangle = E_n\,|\psi_n\rangle$ gilt.

(a) Zeigen Sie für einen beliebigen Operator $\hat{A}$

$$\left\langle \psi_n \,\middle|\, \left[\hat{A}, \hat{H}\right] \,\middle|\, \psi_n \right\rangle = 0 \tag{1}$$

(*3 Punkte*)

(b) Betrachten Sie ein eindimensionales Problem, wobei das System ein Teilchen mit Masse m in einem Potential $\hat{V}(\hat{x})$ ist. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}).$$

Bestimme Sie die Kommutatoren $\left[\hat{H}, \hat{x}\right]$, $\left[\hat{H}, \hat{p}\right]$ und $\left[\hat{H}, \hat{x}\hat{p}\right]$. Hier ist das Ergebnis von Aufgabe 3 nützlich! (*3 Punkte*)

(c) Zeigen Sie, dass das Matrixelement $\langle\psi_n|\hat{p}|\psi_n\rangle$ Null ist. (*3 Punkte*)

(d) Stellen Sie für ein Potential $\hat{V}(\hat{x})$ mit Potenzreihenentwicklung in $\hat{x}$ eine Verbindung zwischen $\langle\psi_n|\hat{x}\frac{\mathrm{d}\hat{V}}{\mathrm{d}x}|\psi_n\rangle$ und der kinetischen Energie $K_n = \langle\psi_n|\hat{p}^2/2m|\psi_n\rangle$ des Zustands $|\psi_n\rangle$ her. (*3 Punkte*)

Aufgabe 5: Matrixdarstellungen (10 Punkte)

Sei $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $\mathcal{H}$, die ein gegebenes physikalisches Systems beschreibt. Die Kets $|\varphi_0\rangle$ und $|\varphi_1\rangle$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} |\varphi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|v_1\rangle + \frac{i}{2}|v_2\rangle + \frac{1}{2}|v_3\rangle, \\ |\varphi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|v_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|v_3\rangle. \end{aligned}$$

(a) Sind $|\varphi_0\rangle$ und $|\varphi_1\rangle$ normiert? (*2 Punkte*)

(b) Berechnen Sie die Matrix P_0, die in der Basis $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ den Projektionsoperator auf den Zustand $|\varphi_0\rangle$ darstellt. Ist P_0 hermitesch? (*3 Punkte*)

(c) Berechnen Sie die Matrix P_1, die in der Basis $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ den Projektionsoperator auf dem Zustand $|\varphi_1\rangle$ darstellt. Ist P_1 hermitesch? (*2 Punkte*)

(d) Ist das Produkt P_0P_1 ein Projektionsoperator? (*3 Punkte*)