Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten
Übungsblatt 7

Dr. Ferdi Schank
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2016 **31.05.2016**

Aufgabe 1: Abbildungen im Hilbertraum (12 Punkte)

Sei $\hat{M}$ der mit den Elementen $|\varphi\rangle$ und $|\psi\rangle$ des Hilbertraums $\mathcal{H}$ durch $\hat{M} = |\varphi\rangle\langle\psi|$ definierte Operator.

(a) Unter welcher Bedingung für $|\varphi\rangle$ und $|\psi\rangle$ ist $\hat{M}$ hermitesch? (*3 Punkte*)

(b) Berechnen Sie $\hat{M}^2$. Unter welcher Bedingung ist $\hat{M}$ ein Projektionsoperator ($\hat{M}^2 = \hat{M}$)? Unter welcher Bedingung ist $\hat{M}$ ein orthogonaler Projektionsoperator? (*3 Punkte*)

(c) Zeigen Sie, dass $\hat{M}$ immer als $\hat{M} = c\hat{P}_A\hat{P}_B$ geschrieben werden kann, wobei $c \in \mathbb{C}$ und $\hat{P}_A$ und $\hat{P}_B$ Projektionsoperatoren sind. Bestimmen Sie c. (*3 Punkte*)

(d) Sei jetzt der Hilbertraum mindestens zweidimensional. Zeigen Sie, dass $|\varphi\rangle$ und $|\psi\rangle$ nicht so gewählt werden können, dass $\hat{M}$ unitär ist. (*3 Punkte*)

Aufgabe 2: Paritätssymmetrie (14 Punkte)

Betrachten Sie einen Hilbertraum $\mathcal{H}$, der durch die Basis der Ortseigenzustände in drei Dimensionen $|\underline{r}\rangle$ aufgespannt wird. Der Paritätsoperator ist definiert durch

$$\hat{\Pi}\,|\underline{r}\rangle = |-\underline{r}\rangle\,. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{\Pi}$ hermitesch ist mit den Eigenwerten ± 1. (*4 Punkte*)

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{P}_+ = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \hat{\Pi}\right)$ und $\hat{P}_- = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - \hat{\Pi}\right)$ Projektionsoperatoren auf den bzw. geraden und ungeraden Eigenraum von $\hat{\Pi}$ sind. (*5 Punkte*)

(c) Zeigen Sie, dass die Matrixelemente eines geraden Operators $\hat{B}_+$, d.h. eines Operators mit $\hat{B}_+ = \hat{\Pi}\hat{B}_+\hat{\Pi}$, zwischen Zuständen mit verschiedener Parität Null sind. (*2 Punkte*)

(d) Zeigen Sie, dass der endliche Potentialtopf von Übungsblatt 2 nur gerade oder ungerade Eigenzustände hat. (*3 Punkte*)
Hinweis: Benutzen Sie, was Sie über die Eigenräume kommutierender Operatoren in der Vorlesung gelernt haben.

Aufgabe 3: Messergebnis (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass eine globale Phase eines Quantenzustandes keine physikalische Bedeutung hat.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die quantenmechanische Messung für zwei bis auf eine globale Phase φ identische Zustände $|\psi\rangle$ und $e^{i\varphi}|\psi\rangle$ das selbe Ergebnis liefert. (*5 Punkte*)

(b) Nehmen Sie an, dass der Zustand eines Systems durch die Eigenfunktion $|a_k\rangle$ des Messoperators $\hat{A}$ zum Messzeitpunkt von $\hat{A}$ beschrieben wird. In disem Fall kann man mit Gewissheit vorhersagen, dass das Messergebnis von $\hat{A}$ der entsprechende Eigenwert a_k ist. Zeigen Sie, dass man damit mit Gewissheit das Messergebnis eines anderen Operators $\hat{B}$ vorhersagen kann, solange $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$ gilt. (*5 Punkte*)
Anmerkung: Die Umkehrung (die Sie nicht zu zeigen brauchen) widerspricht der klassischen Mechanik, in deren Rahmen alle dynamischen Variablen gleichzeitig bestimmbar sind.

Aufgabe 4: Merkwürdigkeit (1 Punkt)

Was ist die Dimension des Hilbertraums $\mathcal{H}$ eines Teilchens mit Masse m im Ortsraum in einer Dimension?
Hinweis: Wenn die Lösung offensichtlich ist, überlegen Sie noch einmal. (*1 Punkt*)

Aufgabe 5: Gekoppelte Oszillatoren II (13 Punkte)

Auf Übungsblatt 5 haben Sie gezeigt, dass sich der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + gm\omega^2\left(x_1 - x_2\right)^2,$$

zweier gekoppelter harmonischer Oszillatoren mit dimensionsloser Kopplungskonstante g in Ortsdarstellung durch die Koordinatentransformationen $y = x_1 - x_2$ und $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ auf die Form

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 x^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\mu\Omega^2 y^2$$

bringen lässt, wobei $M := 2m$, $\mu := \frac{m}{2}$ und $\Omega := \sqrt{1+4g}\omega$ gesetzt wurden.

(a) Setzen Sie $\hat{p}_x = -i\frac{\partial}{\partial x}$ und $\hat{p}_y = -i\frac{\partial}{\partial y}$. Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[\hat{x},\hat{y}], [\hat{y},\hat{p}_y], [\hat{p}_x,\hat{p}_y], [\hat{x},\hat{p}_x].$$

(*3 Punkte*)

(b) Drücken Sie $\hat{H}$ durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$, $\hat{A}^\dagger$ und $\hat{A}$ aus. Dabei sind die Erzeugungsoperatoren als

$$\hat{A}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}_x}{\sqrt{M\omega\hbar}}\right)$$
$$\hat{a}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\mu\Omega}{\hbar}}\hat{y} - i\frac{\hat{p}_y}{\sqrt{\mu\Omega\hbar}}\right)$$

definiert. Zeigen Sie weiter, dass $|N,n\rangle$ ein Energieeigenzustand von $\hat{H}$ ist, wobei $|N\rangle$ und $|n\rangle$ Eigenzustände zu $\hat{A}^\dagger\hat{A}$ und $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ mit den Eigenwerten N und n sind. Bestimmen Sie zudem den Energieeigenwert $E_{N,n}$. (*4 Punkte*)

(c) Berechnen Sie die Wellenfunktion des Grundzustandes in den neuen Koordinaten

$$\psi_0(x,y) = \langle x,y|0,0\rangle$$

und zeigen Sie, dass die Wellenfunktion des Grundzustandes in den alten Koordinaten nicht separabel ist, d.h.

$$\psi_0(x_1,x_2) \neq \psi_0(x_1)\psi_0(x_2).$$

(*6 Punkte*)