Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten
Übungsblatt 8

Dr. Ferdi Schank
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2016 **07.06.2016**

Aufgabe 1: Darstellungen (17 Punkte)

Gegeben sei die darstellungsfreie Schrödingergleichung in einer Dimension

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \tag{1}$$

mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x})$.

a) Leiten Sie ausgehend von (1) die wohlbekannte zeitabhängige Schrödingergleichung in Ortsdarstellung her. (*4 Punkte*)

b) Zeigen Sie ausgehend von (1), dass die zeitabhängige Schrödingergleichung in Impulsdarstellung auf die Form

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(p,t) = \frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}(p,t) + \int dp'\,\frac{\tilde{V}(p-p')}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\psi}(p',t)$$

gebracht werden kann. Hierbei gilt die Definition

$$\tilde{V}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dx e^{-\frac{i}{\hbar}qx}V(x).$$

(*4 Punkte*)

c) Nehmen Sie an, dass $V(x)$ in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Zeigen Sie damit

$$e^{-\frac{i}{\hbar}px}V(x) = V\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}px}.$$

(*3 Punkte*)

d) Zeigen Sie unter Ausnutzung von c), dass die Integro-Differentialgleichung aus b) als Differentialgleichung der Form

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(p,t) = \left(\frac{p^2}{2m} + V\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right)\tilde{\psi}(p,t)$$

geschrieben werden kann. (*3 Punkte*)

e) Sei ein diskretes System gegeben durch $\{|n\rangle\}_{n\in\mathcal{I}}$. Seien ferner $c_n(t) := \langle n|\psi(t)\rangle$ und $H_{nm} := \langle n|H|m\rangle$. Schreiben Sie die Schrödingergleichung (1) in der Basis $\{|n\rangle\}_{n\in\mathcal{I}}$. Welche mathematische Form nimmt diese dann an? (*3 Punkte*)

Aufgabe 2: Lineares Potential (12 Punkte)

Gegeben Sei ein Teilchen der Masse m in einem linearen Potential $\hat{V}(\hat{x}) = -F\hat{x}$ mit $F > 0$. Lösen Sie die zugehörige Schrödingergleichung sowohl in Orts- als auch in Impulsdarstellung. Welche Darstellungswahl war geschickter?
Hinweis: Es steht Ihnen frei, ein Computeralgebrasystem Ihrer Wahl zur Lösung der auftretenden Differentialgleichungen zu nutzen. (*12 Punkte*)

Aufgabe 3: Wechselwirkungsbild (8 Punkte)

Bei der Behandlung vieler quantenmechanischer Systeme mit einem explizit zeitabhängigen Hamiltonoperator $\hat{H}(t)$ ist es häufig sinnvoll, die Schrödingergleichung statt im Schrödinger- bzw. Heisenbergbild im sogenannten Wechselwirkungsbild darzustellen. Dieses sollen Sie nun im Folgenden herleiten. Nehmen Sie dazu an, dass der Hamiltonoperator in der Form

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{W}(t)$$

geschrieben werden kann. Hierbei beschreibt $\hat{H}_0$ den zeitunabhängigen, für alle Zeiten simultan diagonilisierbaren Anteil des Hamiltonoperators und $\hat{W}(t)$ eine im Allgemeinen zeitabhängige Wechselwirkung. Der Zustandsvektor $|\bar{\psi}(t)\rangle$ im Wechselwirkungsbild ist dann gegeben durch

$$|\bar{\psi}(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}|\psi(t)\rangle .$$

Leiten Sie die Schrödingergleichung im Wechselwirkungsbild

$$i\hbar|\bar{\psi}(t)\rangle = \bar{\hat{W}}(t)|\bar{\psi}(t)\rangle$$

her. Identifizieren Sie dazu den Operator $\bar{\hat{W}}(t)$. *(8 Punkte)*

Aufgabe 4: Kohärente Zustände (13 Punkte)

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2\,,$$

der äquivalent zu

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\mathbb{1}\right)$$

ist.

a) Der Verschiebungsoperator, definiert durch

$$\hat{D}(z) \equiv e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}}, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

kann auch durch

$$\hat{D}(z) = e^{\frac{i}{\hbar}(p_0\hat{x} - x_0\hat{p})} \equiv \hat{D}(x_0, p_0)$$

dargestellt werden. Drücken Sie die Konstanten x_0 und p_0 durch m, ω und z aus.
Hinweis: Drücken Sie $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ durch $\hat{x}$ und $\hat{p}$ aus. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie

$$\hat{D}(x_0,p_0)\hat{x}\hat{D}^{-1}(x_0,p_0) = \hat{x} - x_0\mathbb{1}\,,$$
$$\hat{D}(x_0,p_0)\hat{p}\hat{D}^{-1}(x_0,p_0) = \hat{p} - p_0\mathbb{1}\,.$$

Hinweis: Eine Methode ist die Verwendung der Operatorbeziehung

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \ldots$$

(2 Punkte)

c) Ein *kohärenter Zustand* ist durch

$$|z\rangle \equiv \hat{D}(z)|0\rangle$$

definiert, wobei $|0\rangle$ der Grundzustand des harmonischen Oszillators ist. Berechnen Sie $\langle z|\hat{x}|z\rangle$ und $\langle z|\hat{p}|z\rangle$.
Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus b) und erinneren Sie sich, dass $\langle 0|\hat{x}|0\rangle = 0$ und $\langle 0|\hat{p}|0\rangle = 0$ gilt. (*1 Punkt*)

d) Zeigen Sie

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle, \quad \langle z|\hat{a}^\dagger = \langle z|z^* \, .$$

Hinweis: Benutzen Sie $\hat{D}(z)a\hat{D}(z)^{-1}\hat{D}(z)|0\rangle = 0$ und die Operatorbeziehung aus b). (*1.5 Punkte*)

e) Berechnen Sie $\langle z|\hat{x}^2|z\rangle$, $\langle z|\hat{p}^2|z\rangle$ und $\Delta x \Delta p$, wobei $\Delta x \equiv \sqrt{\langle \hat{x}^2\rangle - \langle \hat{x}\rangle^2}$.
Hinweis: Drücken Sie $\hat{x}$ und $\hat{p}$ durch $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus und verwenden Sie die Kommutatorbeziehung und das Ergebnis aus d). (*3 Punkte*)

f) Zeigen Sie, dass das in c) definierte $|z\rangle$ durch

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

gegeben ist, wobei $|n\rangle$ der n-te Eigenzustand von $\hat{H}$ ist.
Hinweis: Benutzen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Beziehung (*1 Punkt*)

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \, .$$

g) Nehmen Sie an, dass sich das System zur Anfangszeit ($t = 0$) im Zustand $|z\rangle$ befindet. Berechnen Sie den Zustand des Systems zur Zeit t

$$|z(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|z\rangle \, .$$

Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus f). (*1 Punkt*)

h) Nehmen Sie an, dass der Anfangszustand $|z\rangle$ ist. Berechnen Sie $\langle z(t)|\hat{x}|z(t)\rangle$, $\langle z(t)|\hat{p}|z(t)\rangle$ und $(\Delta x \Delta p)(t)$.
Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus g). (*2.5 Punkte*)