Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

Übungsblatt 9

Dr. Ferdi Schank
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2016 **14.06.2016**

Aufgabe 1: Radialimpuls (13 Punkte)

Die klassische Definition des Radialimpulses

$$p_r = \frac{1}{r}\left(\underline{r} \cdot \underline{p}\right)$$

mit $r = |\underline{r}|$ muss in der Quantenmechanik wegen der Nichtvertauschbarkeit von $\hat{\underline{r}}$ und $\hat{\underline{p}}$ symmetrisiert werden:

$$\hat{p}_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\underline{r}}}{r} \cdot \hat{\underline{p}} + \hat{\underline{p}} \cdot \frac{\hat{\underline{r}}}{r}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass der Radialimpuls $\hat{p}_r$ in Ortsdarstellung die Form

$$\hat{p}_r = \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r$$

annimmt. Verwenden sie dazu den Gradienten ∇ in Kugelkoordinaten gegeben durch

$$\nabla = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \underline{e}_\phi \frac{1}{r \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}.$$

(*5 Punkte*)

(b) Welche Bedingungen müssen an die Wellenfunktionen gestellt werden, damit $\hat{p}_r$ hermitesch ist? (*3 Punkte*)

(c) Zeigen Sie, dass $\hat{p}_r$ der zu $\hat{r} := |\hat{\underline{r}}|$ kanonisch konjugierte Impuls ist. (*5 Punkte*)

Aufgabe 2: Bahndrehimpuls (37 Punkte)

Es sei $\hat{\underline{L}} = \hat{\underline{r}} \times \hat{\underline{p}}$ der Bahndrehimpulsoperator.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der kanonischen Kommutatorbeziehung $[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}\mathbb{1}$ die Kommutatoren $[\hat{L}_x, \hat{r}^2]$, $[\hat{L}_x, \hat{p}^2]$, $[\hat{L}_z, \hat{x}]$ und $[\hat{L}_z, \hat{p}_x]$. (*8 Punkte*)

b) Berechnen Sie $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$, $[\hat{L}_y, \hat{L}_z]$, $[\hat{L}_z, \hat{L}_x]$ und $[\hat{\underline{L}}^2, \hat{L}_x]$. (*5 Punkte*)

c) Berechnen Sie $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ in Kugelkoordinaten. (*5 Punkte*)

d) Zeigen Sie, dass in Kugelkoordinaten gelten:

(i) $\hat{L}_\pm = ie^{\pm i\phi}\left(\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi} \mp i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$ (*3 Punkte*)

(ii) $\hat{\underline{L}}^2 = -\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$ (*4 Punkte*)

e) Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator in Kugelkoordinaten die Form

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

annimmt, indem Sie ihn ausgehend von der kartesischen Basis auf eine Funktion f wirken lassen und die auftretenden Differentialoperatoren transformieren. (*12 Punkte*)