Theoretische Physik III

SS 2013 — **20.6.2013**
Blatt X — **Fälligkeitsdatum 27.6.2013**

Prof. Dr. Wilhelm-Mauch — http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre:TP_III

Übung 1 *Teilchen im zylindersymmetrischen Potenzial*

Seien ρ, ϕ, z die Zylinderkoordinaten eines spinlosen Teilchens ($x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi; \rho \geq 0$, $0 \leq \phi < 2\pi$). Nimm an, dass die potenzielle Energie des Teilchens nur vom Radius ρ und nicht von ϕ und z abhängt.

a) Zeige, dass der Drehimpulsoperator in Zylinderkoordinaten $\hat{L}_z \equiv \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ durch

$$\hat{L} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

gegeben ist.
Hinweis:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\phi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

(1 Punkt)

b) Drücke den Differenzialoperator im Hamiltonoperator $\hat{H}$ durch Zylinderkoordinaten aus.
Hinweis: es gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

(1 Punkt)

c) Zeige, dass $\hat{H}$ mit $\hat{L}_z$ und $\hat{p}_z$ kommutiert.
Hinweis: benutze die Ergebnisse aus a) und b). *(1 Punkt)*

d) Zeige, dass die Wellenfunktionen der stationären Zustände von der Form

$$\varphi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = f_{n,m}(\rho)e^{im\phi}e^{ikz}$$

sind, wobei m und k noch zu bestimmen sind.
Hinweis: benutze das Ergebnis aus c). *(1 Punkt)*

e) Stelle die Eigenwertgleichung für $\hat{H}$ in Zylinderkoordinaten auf. Leite hieraus die auf $f_{n,m}(\rho)$ führende Differenzialgleichung ab.
Hinweis: verwende das Ergebnis aus b). *(1 Punkt)*

f) Sei $\hat{\Sigma}_y$ der Operator, der in der $\{|\mathbf{r}\rangle\}$-Darstellung y in $-y$ umwandelt (Reflexion an der xOz-Ebene). Kommutiert $\hat{\Sigma}_y$ mit $\hat{H}$? Zeige, dass $\hat{\Sigma}_y$ mit $\hat{L}_z$ antikommutiert, also $\hat{\Sigma}_y\hat{L}_z + \hat{L}_z\hat{\Sigma}_y = 0$ und damit, dass $\hat{\Sigma}_y|\varphi_{n,m,k}\rangle$ ein Eigenvektor von $\hat{L}_z$ ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert? Was kann man aus der Energieentartung der Teilchenzustände folgern? *(1 Punkt)*

Übung 2 *Dreidimensionaler harmonischer Oszillator im Magnetfeld*

Betrachte den dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0\mathbf{r}^2 .$$

m bezeichnet die Masse des Teilchens und $\omega_0 > 0$ die Oszillatorfrequenz.

a) Bestimme die Energiezustände des Teilchens.
Hinweis: die Eigenzustände faktorisieren ähnlich wie beim zweidimensionalen Oszillator (vergl. Übung VIII-2 und IX-2). *(1 Punkt)*

b) Zeige, dass die Entartung des n-ten Energiezustands $g_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ beträgt.
Hinweis: unter Verwendung einer ähnlichen Notation wie in den Übungen VIII-2 und IX-2 sei $n = n_x + n_y + n_z$. Die Anzahl unterschiedlicher Wertepaare (n_y, n_z) ist $n - n_x + 1$. Um auf das gewünschte Ergebnis zu kommen, summiere über die möglichen Werte von n_x der Anzahl der verschiedenen (n_y, n_z)-Paare. *(1 Punkt)*

c) Nimm an, dass sich das Teilchen mit Ladung q in einem zur z-Achse parallelen homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}$ befindet. Es sei $\omega_L = -\frac{qB}{2mc}$. Dann lautet der Hamiltonoperator $\hat{H}$ des Teilchens bezüglich der Eichung $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(\omega_L) ,$$

wobei $\hat{H}_1$ die Summe eines von ω_L linear abhängigen Operators (paramagnetischer Term) und eines quadratisch von ω_L abhängigen Operators (diamagnetischer Term) ist. Schreibe den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0\mathbf{r}^2$$

explizit aus und identifiziere den paramagnetischen und den diamagnetischen Anteil. *(1 Punkt)*

d) Zeige, dass der Hamiltonoperator auf die Form

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\tilde{\omega}_0(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}m\omega_0 z^2 - \omega_L\hat{L}_z \tag{1}$$

gebracht werden kann und bestimme $\tilde{\omega}_0$. Zeige, dass die neuen stationären Zustände exakt bestimmt werden können und finde die zugehörigen Energien
Hinweis: aufgrund der aus (1) ersichtlichen Symmetrien von $\hat{H}$ kann die Wellenfunktion in $\Psi(\mathbf{r}) = \psi(x,y)Z(z)$ faktorisiert werden. $\psi(x,y)$ lässt sich ähnlich wie im Fall des zweidimensionalen harmonischen Oszillators lösen (Übung VIII-2). *(1 Punkt)*

e) Zeige, dass für den Fall $\omega_L \ll \omega_0$ der Einfluss des diamagnetischen Anteils gegenüber dem paramagnetischen Term vernachlässigbar ist.
Hinweis: benutze das Ergebnis aus Teil c). *(1 Punkt)*

f) Betrachte den ersten angeregten Zustand des Systems, dessen Energie $5\hbar\omega_0/2$ für $\omega_L \to 0$ beträgt. Wie ändern sich die Energien und die Entartung in Anwesenheit eines Feldes $\mathbf{B}$ in erster Ordnung in ω_L/ω_0 (Zeeman-Effekt des dreidimensionalen harmonischen Oszillators)?
Hinweis: gehe ähnlich wie in Aufgabe IX-2 vor und finde die zu den unterschiedlichen Zuständen passenden Quantenzahlen. Verwende die Ergebnisse aus Teil d) um die Zustände gleicher Energie zu finden. *(1 Punkt)*

g) Betrachte den zweiten angeregten Zustand mit Energie $7\hbar\omega_0/2$ für $\omega_L \to 0$. Wie lauten die Energien und die Entartung in Anwesenheit eines Feldes $\mathbf{B}$ in erster Ordnung in ω_L/ω_0?
Hinweis: bestimme, analog zu Teil f), welche der sechs verschiedenen Zustände die gleiche Energie besitzen. *(1 Punkt)*

h) Berechene die magnetische Suszeptibilität des Grundzustands

$$\chi_{00} = -\frac{\partial^2 E}{\partial B^2}_{|B=0}\,.$$

Hinweis: die Grundzustandsenergie erhält man aus Teil d). *(1 Punkt)*