Theoretische Physik III

SS 2013 **04.7.2013**
Blatt XII **Fälligkeitsdatum 11.7.2013**

Prof. Dr. Wilhelm-Mauch http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre:TP_III

Übung 1 *Quantenmechanisches Zweikörperproblem*

Betrachte das Wasserstoffatom beschrieben durch den Zweikörper-Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} + \hat{V}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\,.$$

Aufgrund der Abhängigkeit des Potenzials von $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ lässt sich das Problem besser durch den Massenschwerpunkt und die relativen Koordinaten beschreiben.

a) Sei $\hat{\mathbf{r}}_+ = (m_1\hat{\mathbf{r}}_1 + m_2\hat{\mathbf{r}}_2)/M$ und $\hat{\mathbf{r}}_- = \hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2$, wobei $M = m_1 + m_2$ ist. Bestimme die zugehörigen Impulse $\hat{\mathbf{p}}_+$ und $\hat{\mathbf{p}}_-$, sodass die üblichen Kommutatorbeziehungen $[\hat{r}_{\pm,i}, \hat{p}_{\pm,j}] = i\hbar\delta_{ij}$, $[\hat{p}_{\pm,i}, \hat{p}_{\mp,j}] = 0$ und $[\hat{r}_{\pm,i}, \hat{p}_{\mp,j}] = 0$ gelten. Prüfe, ob die gefundenen $\hat{\mathbf{p}}_\pm$ gleich den klassischen Impulsen $\mathbf{p}_{\pm,\text{kl.}}$ sind. *(2 Punkte)*

b) Drücke $\hat{H}$ durch die neuen Koordinaten aus und zeige, dass die + und − Koordinaten entkoppelt sind. *(1 Punkt)*

c) Bestimme mit Hilfe von den in der Vorlesung gezeigten Ergebnissen die Eigenvektoren und Eigenwerte von $\hat{H}$.
Hinweis: benutze das Tensor Produkt der + und − Lösung. *(2 Punkte)*

Übung 2 *Addition von Drehimpulsen*

Betrachte das Zweikörpersystem in dem ein System den Drehimpuls $l = 1$ hat und das andere $s = 1/2$. Dieses System kann durch die Basis der Eigenvektoren $|l, s; m_l, m_s\rangle$ von $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{\mathbf{S}}^2$, $\hat{L}_z$ und $\hat{S}_z$ beschrieben werden. Die Basis der Eigenvektoren $|J; m_j\rangle$ von $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ und $\hat{J}_z$ beschreibt das System ebenfalls.

a) Gib die Zustände $|J, m_j\rangle$ für den Teilraum mit $j = 1 + 1/2$ als Linearkombination von $|l, s; m_l, m_s\rangle$ an. *(3 Punkte)*

b) Gib die Zustände $|J, m_j\rangle$ für den Teilraum mit $j = 1 - 1/2$ als Linearkombination von $|l, s; m_l, m_s\rangle$ an. *(2 Punkte)*

Übung 3 *EPR Paradoxon*

Betrachte zwei Spin-1/2-Teilchen deren äußere Freiheitsgrade klassisch behandelt werden. Die Teilchen bewegen sich geradlinig und kollidieren unter der Spin-Spin-Wechselwirkung $\hat{H}_{\mathrm{I}} = a(t)\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$, wobei $a(t)$ gegeben ist durch

$$a(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ a & 0 < t < T \\ 0 & T < t \end{cases} .$$

a) Berechne der Zustand nach der Kollision ($t = \infty$) mit dem Anfangszustand $|\psi(t = -\infty)\rangle = |+, -\rangle$. Benutze den Hamiltonoperator $\hat{H}_{\mathrm{I}}$ *(2 Punkte)*

b) Nach der Kollision entfernen sich die Spins wieder voneinander. Ein Beobachter A misst $\hat{S}_{1,z}$. Finde den Zustand nach der Messung im Fall des Ergebnisses $\langle \hat{S}_{1,z} \rangle = \hbar/2$. Was ist das Ergebnis von $\hat{S}_{2,z}$ gemessen von einem zweiten Beobachter B? Wie lautet die Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis? *(1 Punkt)*

c) Wenn Beobachter A $-\hbar/2$ gemessen hat, was würde dann das Ergebnis der Messung von $\hat{S}_{2,z}$ sein und mit welcher Wahrscheinlichkeit würde es gemessen? *(1 Punkt)*

Das Ergebnis einer Messung in System 1 scheint einen kritischen Einfluss auf das Ergebnis von Beobachter B zu haben, sogar dann, wenn die zwei Teilchen ziemlich weit voneinander entfernt sind. Dies scheint dem Kausalitätsprinzip zu widersprechen. Dies ist ein wichtiges Paradoxon (Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon), das die die Existenz von starken Korrelation in der QM zeigt.