Theoretische Physik III

SS 2013 **25.4.2013**
Blatt II **Fälligkeitsdatum 2.5.2013**

Prof. Dr. Wilhelm-Mauch http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre:TP_III

Die Sprechstunde zur Vorlesung wurde verschoben und findet ab jetzt Montags, 14-15 Uhr statt.

Übung 1 *Potenzial*

a) Finde die Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger Gleichung mit dem Potenzial

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a \\ V_0, & |x| < a \end{cases}$$

wobei $V_0 > 0$ und die Energie $E > V_0$ ist. Rechne die Transmissionsamplitude und die Reflexionsamplitude für ein Teilchen das von links nach rechts propagiert. *(2 punkte)*

b) Zeige, dass das Quantenteilchen eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit het reflektiert zu werden auch für Energien höher als die Potenzialbarriere ($E > V_0$). Zeige, dass nur für $E \gg V_0$ diese Wahrscheinlichkeit gegen Null geht. *(1 punkt)*

c) Finde die Energiezustände, für die es keine Reflexion gibt. *(1 punkt)*

Übung 2 *Dirac Delta Potenzial*

Wir betrachten ein Teilchen in einem Delta-Potenzial $V(x) = V_0\delta(x)$.

a) Schreibe die Anschlussbedingungen für die Wellenfunktion $\psi(x)$ und die Ableitung $\psi'(x)$ des Teilchens um $x = 0$. Verwende den Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} a_+e^{ikx} + a_-e^{-ikx}, & x < 0 \\ b_+e^{ikx} + b_-e^{-ikx}, & x > 0 \end{cases}$$

Das Ergebnis wird durch die Wahrscheinlichkeitsamplituden a_-, a_+, b_-, und b_+ sowie andere Modellparameter ausgedrückt.
Hinweis: Integriere die Schrödingergleichung von $x = -\epsilon$ bis $x = \epsilon$ und schicke $\epsilon \to 0^+$
(1 punkt)

b) Finde den gebundenen Zustand Energie $E < 0$ im Fall von einem attraktiven Potenzial $V_0 < 0$.
Hinweis: Die Wellenfunktion kann im Unendlichen nicht unschränkt sein. *(1 punkt)*

c) Rechne den Transmissionskoeffizient und den Reflexionskoeffizent durch eine Potenzialbarriere mit $V_0 > 0$. *(2 punkte)*

Übung 3 *Streuung eines Wellenpakets in einer Stufenpotenzial*

Wir betrachten ein Stufenpotenzial $V(x) = V_0\theta(x)$ mit $V_0 > 0$ und der Heaviside-Funktion $\theta(x)$. Die Energie-Eigenzustände sind ebenen Wellen

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} + \frac{k-\kappa}{\sqrt{2\pi}(k+\kappa)}e^{-ikx}, & x < 0 \\ \frac{2k}{\sqrt{2\pi}(k+\kappa)}e^{i\kappa x}, & x > 0. \end{cases}$$

Statt ebener Wellen wir die Wellenfunktion eines Teilchen jedoch besser durch ein Wellenpaket beschrieben. Trotzdem kann man ebene Wellen verwenden, falls das Wellenpaket größer als die anderen Lägenskalen.
Betrachte ein Gaußsche Wellenpaket, das zuerst um $x = -a$ in den Ortsraum zentriert ist. Seines Standardabweichung ist σ sodass $a \gg \sigma$. In den Impulseraum ist diese Wellenpaket um $k = k_0 > \sqrt{2mV_0}$ zentriert

$$\psi(x,0) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}}e^{ik_0(x+a)-(x+a)^2/2\sigma^2}.$$

a) Zeige, dass für diese Wellenpaket

$$\psi(x,0) = \int dk\psi_k(x)\mathcal{F}_k[\psi(x,0)],$$

wobei

$$\mathcal{F}_k[\psi(x,0)] = \left(\frac{\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{ika}e^{-(k-k_0)^2\sigma^2/2}.$$

gilt.
Hinweis: Was ist das innere Produkt von $\psi(x,0)$ mit den reflektierten und durchlaufenden Wellen? *(1 punkt)*

b) Was bedeutet κ in der Lösung der ebenen Wellen? Zeige, dass für das einfallende Wellenpaket die reflektierte und transmittierte Welle durch

$$\psi_R(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dke^{ikx}\phi_R(k,t), \quad \psi_T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dke^{ikx}\phi_T(k,t),$$

mit

$$\begin{aligned} \phi_R(k,t) &= \left(\frac{\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{k+\kappa}{k-\kappa}\right)e^{-i\hbar k^2t/2m}e^{-(k+k_0)^2\sigma^2/2}e^{-ika}, \\ \phi_T(k,t) &= \left(\frac{\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{2\sqrt{k^2+2mV_0/\hbar^2}}{\sqrt{k^2+2mV_0/\hbar^2}+k}\right)\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+2mV_0/\hbar^2}}\right) \\ &\quad \times e^{-i\hbar(k^2+2mV_0/\hbar^2)t/2m}e^{-(\sqrt{k^2+2mV_0/\hbar^2}-k_0)^2\sigma^2/2}e^{i\sqrt{k^2+2mV_0/\hbar^2}a}. \end{aligned}$$

beschrieben werden. *(1 punkt)*

c) Zeige, dass der Transmissionskoeffizient und Reflexionskoeffizent durch

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{\frac{\sigma^2}{\pi}} \int dk \left(\frac{k-\kappa}{k+\kappa}\right)^2 e^{-(k-k_0)^2\sigma^2}, \\
T &= \sqrt{\frac{\sigma^2}{\pi}} \int dk \frac{\kappa}{k} \left(\frac{2k}{k+\kappa}\right)^2 e^{-(k-k_0)^2\sigma^2}.
\end{aligned}
$$

gegeben sind. *(1 punkt)*

d) Der Transmissionskoeffizient und der Reflexionskoeffizent kann durch

$$
\begin{aligned}
R &= A_R + \frac{B_R}{\sigma} + \frac{C_R}{\sigma^2} + \ldots, \\
T &= A_T + \frac{B_T}{\sigma} + \frac{C_T}{\sigma^2} + \ldots.
\end{aligned}
$$

entwickelt sein. Berechne A_R, A_T, B_R, B_T, C_R, und C_T. Du kannst Mathematica oder Maple verwenden. Wie können Transmissionskoeffizient und Reflexionskoeffizent für eine einfallende ebene Welle von diesen Ergebnissen rekonstruirt werden? *(1 punkt)*