Theoretische Physik III

SS 2013 **10.5.2013**
Blatt IV **Fälligkeitsdatum 16.5.2013**

Prof. Dr. Wilhelm-Mauch http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre:TP_III

Übung 1 *Kommutatoren und Operatoralgebra*

Die Matrix $\hat{\sigma}_x$ ist definiert durch $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass

$$e^{i\alpha\hat{\sigma}_x} = \mathbb{1}\cos\alpha + i\hat{\sigma}_x \sin\alpha$$

gilt, mit $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *(1 Punkt)*

b) Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei Operatoren die mit $[\hat{A}, \hat{B}]$ kommutieren. Zeige

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^n\right] = n\hat{B}^{n-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$$
$$\left[\hat{A}^n, \hat{B}\right] = n\hat{A}^{n-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right].$$

Ein Weg zur Lösung ist vollständige Induktion mit der Zerlegung $\hat{B}^n = \hat{B}\hat{B}^{n+1}$ *(1 Punkt)*

c) Wende das vorherige Ergebnis für den Fall $\hat{A} = \hat{x}$, $\hat{B} = \hat{p}$ an und zeige, dass für eine Operatorfunktion $f(\hat{x})$, die als Potenzreihe von $\hat{x}$ entwickelt werden kann,

$$\left[\hat{p}, \hat{f}(\hat{x})\right] = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}x}$$

gilt. *(1 Punkt)*

Übung 2 *Erwartungswerte von Operatoren*

Sei $\hat{H}$ der Hamiltonoperator eines Quantensystems mit Eigenwerten E_n und Eigenvektoren $|\psi_n\rangle$, sodass $\hat{H}\,|\psi_n\rangle = E_n\,|\psi_n\rangle$ gilt.

a) Zeige für einen beliebigen Operator $\hat{A}$

$$\left\langle \psi_n \,\middle|\, \left[\hat{A}, \hat{H}\right] \,\middle|\, \psi_n \right\rangle = 0 \tag{1}$$

(1 Punkt)

b) Betrachte ein eindimensionales Problem, wobei das System ein Teilchen mit Masse m in einem Potenzial $\hat{V}(x)$ ist. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x).$$

Bestimme die Kommutatoren $\left[\hat{H}, \hat{x}\right]$, $\left[\hat{H}, \hat{p}\right]$ und $\left[\hat{H}, \hat{x}\hat{p}\right]$. Hier ist das Ergebnis von Aufgabe 1 nützlich! *(1 Punkt)*

c) Zeige, dass das Matrixelement $\langle\psi_n|\hat{p}|\psi_n\rangle$ Null ist. *(1 Punkt)*

d) Stelle, für ein Potenzial $V(x)$ mit Potenzreihenentwicklung in x, eine Verbindung zwischen $\langle\psi_n|\hat{x}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}|\psi_n\rangle$ und der kinetischen Energie $K_n = \langle\psi_n|\hat{p}^2/2m|\psi_n\rangle$ des Zustands $|\psi_n\rangle$ her. *(1 Punkt)*

Übung 3 *Abbildungen im Hilbertraum*

Sei $\hat{M}$ der durch $\hat{M} = |\varphi\rangle\langle\psi|$ definierte Operator, mit den Elementen $|\varphi\rangle$ und $|\psi\rangle$ des Hilbertraums $\mathcal{H}$.

a) Unter welcher Bedingung für $|\varphi\rangle$ und $|\psi\rangle$ ist $\hat{M}$ hermitesch? *(1 Punkt)*

b) Berechne $\hat{M}^2$. Unter welcher Bedingung ist $\hat{M}$ ein Projektionsoperator? Unter welcher Bedingung ist $\hat{M}$ ein orthogonaler Projektionsoperator? *(1 Punkt)*

c) Zeige, dass $\hat{M}$ immer als $\hat{M} = c\hat{P}_A\hat{P}_B$ geschrieben werden kann, wobei $c \in \mathbb{C}$ und $\hat{P}_A$ und $\hat{P}_B$ Projektionsoperatoren sind. Berechne c. *(1 Punkt)*

d) Sei jetzt der Hilbertraum mindestens zweidimensional. Zeigen Sie, dass $|\varphi\rangle$ und $|\psi\rangle$ nicht so gewählt werden können, dass $\hat{P}$ unitär ist? *(1 Punkt)*

Übung 4 *Matrixdarstellungen*

Sei $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $\mathcal{H}$, die ein gegebenes physikalisches Systems beschreibt. Die Kets $|\varphi_0\rangle$ und $|\varphi_1\rangle$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} |\varphi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|v_1\rangle + \frac{i}{2}|v_2\rangle + \frac{1}{2}|v_3\rangle, \\ |\varphi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|v_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|v_3\rangle. \end{aligned}$$

a) Sind $|\varphi_0\rangle$ und $|\varphi_1\rangle$ normiert? *(1 Punkt)*

b) Berechne die Matrix P_0, die in der Basis $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ den Projektionsoperator auf den Zustand $|\varphi_0\rangle$ darstellt. Ist P_0 hermitesch? *(1 Punkt)*

c) Berechne die Matrix P_1, die in der Basis $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ den Projektionsoperator auf dem Zustand $|\varphi_1\rangle$ darstellt. Ist P_1 hermitesch? *(1 Punkt)*

d) Ist das Produkt $P_0 P_1$ ein Projektionsoperator? *(1 Punkt)*