Theoretische Physik III

SS 2013 **16.5.2013**
Blatt V **Fälligkeitsdatum 23.5.2013**

Prof. Dr. Wilhelm-Mauch http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre:TP_III

Übung 1 *Paritätssymmetrie*

Betrachte einen Hilbertraum $\mathcal{H}$, der durch die Basis der Orts-Eigenzustände in einer Dimension $|r\rangle$ aufgespannt wird. Der Paritätsoperator ist definiert durch

$$\hat{\Pi}\,|r\rangle = |-r\rangle\,. \tag{1}$$

a) Zeige, dass $\hat{\Pi}$ hermitesch ist, den mit Eigenwerten ± 1. *(1 Punkt)*

b) Zeige, dass $\hat{P}_+ = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \hat{\Pi}\right)$ und $\hat{P}_- = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - \hat{\Pi}\right)$ Projektionsoperatoren auf den bzw. geraden und ungeraden Eigenraum von $\hat{\Pi}$ sind. *(1 Punkt)*

c) Zeige, dass die Matrixelemente eines geraden Operators $\hat{B}_+$, d.h. eines Operators mit $\hat{B}_+ = \hat{\Pi}\hat{B}_+\hat{\Pi}$, zwischen Zuständen mit verschiedener Parität null sind. *(1 Punkt)*

d) Zeige, dass den Endlicher Potenzialtopf in Blatt III nur gerade oder ungerade Eigenzustäde hat.
Hinweis: Benutzen Sie, was Sie über die Eigenräume kommutierender Operatoren in der Vorlesung gelernt haben *(1 Punkt)*

Übung 2 *Messergebnis*

a) Zeige, dass eine globale Phase eines Quantenzustand keine physikalische Bedeutung hat.
Hinweis: Zeige, dass die quantenmechanische Messung für zwei, bis auf eine globale Phase φ identische, Zustände $|\psi\rangle$ und $e^{i\varphi}|\psi\rangle$ das gleiche Ergebnis liefert. *(1 Punkt)*

b) Nimm an, dass den Zustand eines System durch die Eigenfunktion $|u_k\rangle$ des Messoperators $\hat{A}$, zum Messzeitpunkt von $\hat{A}$, beschrieben wird. In disem Fall können wir mit Gewissheit vorhersagen, dass das Messergebnis von $\hat{A}$ der entsprechende Eigenwert a_k ist. Zeige, dass man damit mit Gewissheit das Messergebnis eines anderen Operator $\hat{B}$ vorhersagen kann, solange $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$ gilt.
Anmerkung: Die Umkehrung (die Sie nicht zu zeigen brauchen) widerspricht der klassischen Mechanik, wo alle dynamischen Variablen gleichzeitig bekannt sind. *(2 Punkt)*

Übung 3 *Merkwürdigkeit (Extrapunkt!)*

Was ist die Dimension des Hilbertraums eines Teilchens mit Masse m im Ortsraum in einer Dimension?
Hinweis: Wenn die Lösung offensichtlich ist, überlege es noch einmal. *(1 Punkt)*

Übung 4 *Messungen*

Nimm an, dass eine physikalische Größe durch den Operator

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

beschrieben wird.

a) Was sind die möglichen Messergebnisse $\{m_j\}$? *(1 Punkt)*

b) Nimm an, dass die Messung des Systems, das anfänglich im Zustand

$$\psi_i = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ist, das maximale Ergebnis, d.h. $\max(\{m_j\})$, liefert. Wie lautet der Zustand direkt nach der Messung? *(3 punkte)*

c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Messergebnisse $\{m_j\}$ fü den Zustand ψ_i. *(1 Punkt)*

Übung 5 *Dreidimensionale Wellenfunktion im Ortsraum*

Betrachte die dreidimensionale Wellenfunktion

$$\psi(x, y, z) = N e^{-\frac{|x|}{2c_x} - \frac{|y|}{2c_y} - \frac{|z|}{2c_z}}, \quad c_x, c_y, c_z > 0.$$

a) Berechne der Normalizierungskoeffizient N. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Messung von $\hat{x}$ ein Ergebnis zwischen 0 und c_x ergibt. *(1 Punkt)*

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die gleichzeitige Messung von $\hat{y}$ und $\hat{z}$ Ergebnisse zwischen $-c_y$ und c_y, sowie $-c_z$ und c_z liefern. *(1 Punkt)*

c) Berechne den Erwartungswert der Impulskomponenten $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$, und $\hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$. *(1 Punkt)*

d) Sind die Operatoren $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, und $\hat{p}_z$ hermitesch? Zeige dies durch Berechnung. *(1 Punkt)*