Theoretische Physik III

SS 2013 **23.5.2013**
Blatt VI **Fälligkeitsdatum 31.5.2013**

Prof. Dr. Wilhelm-Mauch http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre:TP_III

Übung 1 *Heisenbergsche Unschärferelation*

Leite die Heisenbergsche Unschärferelation für Ort- und Impuls

$$\Delta\hat{p}\Delta\hat{q} \geq \frac{\hbar}{2}$$

mithilfe der Kommutatorbeziehung $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ her.
Hinweis: drücke den Vektor $|\varphi\rangle$ durch $|\varphi\rangle = (\hat{q} + i\lambda\hat{p})|\psi\rangle$ aus. Aus der positiven Norm von $|\varphi\rangle$ erhält man eine Bedingung für die Diskriminante des Polynoms $f(\lambda) = \langle\hat{q}^2\rangle + \lambda^2\langle\hat{p}^2\rangle - \lambda\hbar$. Benutze diese Bedingung um eine Ungleichung für das Produkt $\langle\hat{q}^2\rangle\langle\hat{p}^2\rangle$ zu finden und daraus die Heisenbergsche Unschärferelation abzuleiten. (*2 Punkte*)

Übung 2 *Dirac Polarisatoren*

Polarisatoren lassen Licht nur in einer vorgegeben Polarisationsrichtung durch und blockieren alle dazu orthogonalen Anteile. In der quantenmechanischen Beschreibung verhält sich ein Polarisator wie ein Messapparat zur Bestimmung der Polarisation des Lichts. Wird beispielsweise ein vertikaler Polarisator verwendet, so ist das transmittierte Licht vertikal polarisiert und der Polarisator kann als Projektor in diese Richtung aufgefasst werden. Im Folgenden wird ein einzelnes Photon durch mehrere Polarisatoren geschickt. Der Anfangszustand des Photons sei

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_{horizontal}\rangle + \psi_{vertikal}\rangle\right) .$$

a) Ein vertikaler Polarisator und ein horizontaler Polarisator werden hintereinander durchlaufen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit das Photon nach dem zweiten Polarisator zu messen. (*1 Punkt*)

b) Nun wird vor bzw. hinter die beiden Polarisatoren ein diagonaler Polarisator (45°) platziert. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit das Photon hinter den drei Polarisatoren zu messen Null ist. (*1 Punkt*)

c) Der diagonale Polarisator wird zwischen den vertikalen und horizontalen Polarisator gestellt. Zeige, dass das Photon eine endliche Wahrscheinlichkeit hat hinter der Anordnung gemessen zu werden. Wie führt die Hinzunahme eines Polarisators, der bestimmte Photonen blockiert, zu dieser nicht-verschwindenden Wahrscheinlichkeit? (*2 Punkte*)

Übung 3 *Virialsatz*

a) Betrachte das eindimensionale Problem eines Teilchens mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x})$$

im Potenzial

$$\hat{V}(\hat{x}) = \lambda \hat{x}^n \,.$$

Bestimme den Kommutator $[\hat{H}, \hat{x}\hat{p}]$. Zeige, dass für stationäre Zustände die Erwartungswerte $\langle \hat{T} \rangle$ und $\langle \hat{V} \rangle$ der kinetischen und potenziellen Energie die Beziehung $2\langle \hat{T} \rangle = n\langle \hat{V} \rangle$ erfüllen. *(2 Punkte)*

b) Im dreidimensionalen Fall lautet der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{\mathbf{r}}) \,.$$

Bestimme den Kommutator $\left[\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}}\right]$. Nimm an, dass $V(\mathbf{r})$ eine homogene Funktion n-ter Ordnung in den Variablen x, y und z ist. Welche Beziehung besteht zwischen den Erwartungswerten von kinetischer und potenzieller Energie des Teilchens im stationären Zustand? Wende dies für denn Fall eines sich im Potenzial $V(\mathbf{r}) = -e^2/|\mathbf{r}|$ bewegenden Teilchens an (Wasserstoffatom).
Hinweis: eine homogene Funktion V vom Grade n in den Variablen x, y und z erfüllt per Definition die Beziehung $V(\alpha x, \alpha x, \alpha z) = \alpha^n V(x, y, z)$ und den Eulerschen Satz

$$x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} = nV(x, y, z) \,.$$

(2 Punkte)

Übung 4 *Spin-Observablen*

a) Für ein Spin-1/2-Teilchen lautet die Matrixdarstellung der Operatoren $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_z$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,.$$

Berechne den Kommutator $[\hat{S}_x, \hat{S}_z] \equiv \hat{S}_x\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{S}_x$ und den Antikommutator $\{\hat{S}_x, \hat{S}_z\} \equiv \hat{S}_x\hat{S}_z + \hat{S}_z\hat{S}_x$. Sind $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_z$ kompatible Observablen? Besitzen $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_z$ einen vollständigen Satz gemeinsamer Eigenzustände?

(1 Punkt)

b) Zu Beginn befinde sich das Spin-1/2-Teilchen im Zustand

$$\psi_i = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

Nun wird eine Sequenz von Messungen der Operatoren in folgender Reihenfolge ausgeführt: (i) $\hat{S}_z$, (ii) $\hat{S}_x$, (iii) $\hat{S}_z$, (iv) $\hat{S}_x$. Wie lauten die möglichen Messergebnisse und Erwartungswerte vor jeder Messung (i), (ii), (iii) und (iv)? Mit anderen Worten, was sind $\langle \hat{S}_z \rangle$ und die möglichen Messergebnisse in Messung (i) usw. ? Ist die Zeitentwicklung von ψ deterministisch? Andere Einflüsse auf die Dynamik werden hierbei vernachlässigt.

(2 Punkte)

c) Wie lauten die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Messergebnisse zu den jeweiligen Messungen (i), (ii), (iii) und (iv) für das System aus Teil b)? *(1 Punkt)*