Theoretische Physik III

SS 2013 **31.5.2013**
Blatt VII **Fälligkeitsdatum 6.6.2013**

Prof. Dr. Wilhelm-Mauch http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre:TP_III

Übung 1 *Doppelmuldenpotenzial und Ammoniakmaser*

Der Ammoniakmaser erzeugt elektromagnetische Strahlung im Mikrowellenbereich. Ein Strahl von Ammoniakmolekülen, der Moleküle im Grund- und angeregten Zustand enthält, durchfliegt ein Feld mit hohem Gradienten. Wegen der hohen Empfindlichkeit gegenüber dem Feld werden die Moleküle in unterschiedlichen Zuständen in zwei verschiedene Strahlen getrennt.
Danach fliegt der Strahl mit den angeregten Molekülen durch die Maser-Kavität mit Frequenz ω. Ein zeitabhängiges elektrisches Feld innerhalb der Kavität bewirkt, dass die Moleküle unter Aussendung eines Photons in den Grundzustand zerfallen. Dieser Vorgang wird nun genauer betrachtet.
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Hamiltonoperator des Stickstoffatoms in einem Ammoniakmolekül

$$\hat{H} = E_0 \mathbb{1} + \mu\mathcal{E}\hat{\sigma}_z + T\hat{\sigma}_x$$

lautet. E_0 ist die Energie der stationären Zustände ohne Tunneleffekt und elektrisches Feld. $\mathcal{E}$ ist die Wechselwirkungsenergie des äußeren elektrischen Feldes mit dem Dipolmoment des Ammoniakmoleküls μ. T ist die Kopplungsenergie aufgrund des Tunneleffekts.

a) Berechne die Energie der Eigensuztände von $\hat{H}$ und skizziere das erhaltene Energiespektrum als Funktion von $\mathcal{E}$ für $\mathcal{E} \in \{-E_0, E_0\}$. Zeichne das Energiespektrum ohne Tunneleffekt ($T = 0$) in das gleiche Schaubild. Daraus sollte ersichtlich sein, dass sich die zwei Energiezustände unter Anwesenheit des Tunneleffekts nicht schneiden (sogenannte Antikreuzung). *(2 punkte)*

b) Zeige, dass sich für kleine Feldstärken $(\mu\mathcal{E})^2 << T^2)$ die Energie der Zustände mit $\mathcal{E}$ ändert. Zeige, dass diese abhängigkeit ist linear in die Granze von hohen Feld $(\mu\mathcal{E})^2 >> T^2)$. *(1 Punkt)*

Bemerkung: wenn das Maser-Feld klein ist im Gegensatz zu T ändert sich die Energie quadratisch mit $\mathcal{E}$ und die klassische Kraft die die beiden Strahlen trennt ist $F = \mu^2/(2T)\nabla\mathcal{E}$.

c) Nimm an, dass das elektrische Feld in der Maser-Kavität $\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0\cos(\omega t)$ ist. Löse die Schrödingergleichung im Rezonanzfall, d.h. $\omega = \omega_0$, wobei $2T = \hbar\omega_0$. Zeige, dass für ein niedriges elektrisches Feld $\mu\mathcal{E}_0 << T$ die Wahrscheinlichkeit, das Molekül im Grund- bzw. angeregten Zustand zu finden, kohärent oszilliert. Berechne die Zeit Δt, in der das Molekül sich innerhalb der Kavität aufhalten muss um diese im Grundzustand zu verlassen. *(3 punkte)*

Hinweis: Nimm an, dass die Wahrscheinlichkeitsamplitude, das Molekül im Grund-/ angeregten Zustand zu finden, das Produkt einer langsam in der Zeit variierenden einhüllenden Funktion γ_j mit $\exp(-iE_j t/\hbar)$ ist, wobei E_j die Energie des j-ten Zustands (Grund-/ angeregter Zustand) für $\mathcal{E} = 0$ ist. Behandle $\exp(i(\omega + \omega_0)t)$ als im Vergleich zu γ_j und $\exp(i(\omega - \omega_0)t)$ schnell oszillierende Funktion, sodass ihre Ersetzung durch den Mittelwert (=0) eine gute Approximation darstellt.

Übung 2 *Rabi-Oszillation*

Für diese Übung finden Sie auf der Vorlesungs-Homepage Hinweise zu den Software-Tools

Ein Quantensystem mit zwei Zuständen, die mit elektromagnetischer Strahlung wechselwirken, lässt sich durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\omega_{10} & \Omega e^{i\omega t} \\ \Omega^* e^{-i\omega t} & \omega_{10} \end{pmatrix} \equiv \hat{H}' + \hat{H}'' ,$$

beschreiben, wobei

$$\hat{H}' = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad \hat{H}'' = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \Delta & \Omega e^{i\omega t} \\ \Omega^* e^{-i\omega t} & -\Delta \end{pmatrix}, \quad \Delta \equiv \omega - \omega_{10}$$

gilt. Der Zustand $|0\rangle$ ($|1\rangle$) hat die Energie $-\hbar\omega_{10}/2$ ($\hbar\omega_{10}/2$). Die Stärke des Kopplung zwischen dem Zweiniveausystem und der Strahlung ist Ω. Die Frequenz des Antriebsfeldes ist ω. Die Frequenzdifferenz $\Delta \equiv \omega - \omega_{10}$ ist die Verstimmungsfrequenz. In einem rotierenden Bezugssytem gilt für die Zustände folgende Gleichung

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = \hat{H}_I|\psi_I(t)\rangle ,$$

wobei

$$\hat{H}_I = e^{\frac{i\hat{H}'t}{\hbar}}\hat{H}'' e^{\frac{-i\hat{H}'t}{\hbar}}$$

der Hamiltonoperator im rotierenden Bezugssystem ist.

a) Berechne $\hat{H}_I$ als Funktion von Ω aund Δ und drücke das Ergebnis in der $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ Basis aus. Berechne die Eigenenergien E_+ und E_- von $\hat{H}_I$ und skizziere diese als Funktion von Δ für die Werte $\Omega \in \{0, 2\pi, 4\pi\}$ in beliebigen Einheiten. Welche Kurve zeigt eine *Antikeuzung* und wie wird dieser Begriff durch die Kurven geprägt? *(1 Punkt)*

b) Zwei beliebige orthonormale Zustände für das Zweiniveaussystem können durch

$$|\tilde{0}\rangle = \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi/2}|0\rangle + \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right) e^{i\phi/2}|1\rangle$$
$$|\tilde{1}\rangle = -\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi/2}|0\rangle + \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right) e^{i\phi/2}|1\rangle.$$

darstellt werden. Seien $|\tilde{0}\rangle$ und $|\tilde{1}\rangle$ die zwei Eigenzustände von $\hat{H}_I$. Berechne $\tan\theta$ als Funktion von Ω und Δ.

Hinweis: beginne mit $\hat{H}_I$, dargestellt in der Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ von a). Mit den Eigenwertgleichungen $\hat{H}_I|\tilde{0}\rangle = E_-|\tilde{0}\rangle$ und $\hat{H}_I|\tilde{1}\rangle = E_+|\tilde{1}\rangle$ erhält man die Koeffizienten $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *und* $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *als Funktion von Ω und Δ. Danach können die trigonometrischen Formeln benutzt werden um* $\tan\theta$ *zu finden.* *(2 punkte)*

c) Zeige, dass

$$\begin{aligned} |0\rangle &= e^{i\phi/2}[\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)|\tilde{0}\rangle - \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)|\tilde{1}\rangle] \\ |1\rangle &= e^{-i\phi/2}[\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)|\tilde{0}\rangle + \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)|\tilde{1}\rangle] \end{aligned}$$

gilt. Benutze dieses Ergebnis, um die Matrix Elemente

$$\langle 1|\psi_I(t)\rangle = \langle 1|e^{-i\hat{H}_I t/\hbar}|0\rangle, \quad \langle 0|\psi_I(t)\rangle = \langle 0|e^{-i\hat{H}_I t/\hbar}|0\rangle$$

zu berechnen und die Zeitentwicklung eines Zustands, der im Grundzustand startet, zu finden. Drücke das Ergebnis durch Ω, Δ und ϕ aus.

Hinweis: benutze die Gleichungen $\hat{H}_I|\tilde{0}\rangle = E_-|\tilde{0}\rangle$ und $\hat{H}_I|\tilde{1}\rangle = E_+|\tilde{1}\rangle$ um die Matrix im Exponenten zu vereinfachen. Benutze b) um das innere Produkt $\langle 1|\tilde{0}\rangle$ zu bestimmen. (2 punkte)

d) Um die *Rabi-Oszillationen* zu diskutieren, skizziere $|\psi_I(t)\rangle$ auf der Blochkugel für i) $\Delta = 0$, $\Omega = 2\pi$, ii) $\Delta = 0$, $\Omega = 4\pi$, iii) $\Delta = 2\pi$, $\Omega = 2\pi$, und iv) $\Delta = 3\pi$, $\Omega = 2\pi$. Benutze eine Darstellung bei der $|0\rangle$ ($|1\rangle$) auf dem Nordpol (Südpol) der Blochkugel liegt. *(2 punkte)*

e) Zeige, dass die Übergangwahrscheinlichkeit $|\langle 1|\psi_I(t)\rangle|^2$ vom Grundzustand in den angeregten Zustand durch

$$|\langle 1|\psi_I(t)\rangle|^2 = \frac{\Omega^2}{2(\Omega^2 + |\Delta|^2)}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\Omega^2 + |\Delta|^2}t\right)\right]$$

gegeben ist. Skizziere die Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zustand $|0\rangle$ und $|1\rangle$ ist als Funktion der Zeit, wenn sich zum Zeitpunkt $t = 0$ das System im Zustand $|0\rangle$ befindet. Benutze i) $\Delta = 0$, $\Omega = 2\pi$, ii) $\Delta = 0$, $\Omega = 4\pi$, iii) $\Delta = 2\pi$, $\Omega = 2\pi$, and iv) $\Delta = 3\pi$, $\Omega = 2\pi$.

(1 Punkt)