Theoretische Physik III

SS 2013 **6.6.2013**
Blatt VIII **Fälligkeitsdatum 13.6.2013**

Prof. Dr. Wilhelm-Mauch http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre:TP_III

Übung 1 *Kohärenter Zustand*

Betrachte einen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \,,$$

der äquivalent zu

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

ist.

a) Der Verschiebungsoperator, definiert durch

$$\hat{D}(z) \equiv e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}}, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

kann auch durch

$$\hat{D}(z) = e^{\frac{i}{\hbar}(p_0\hat{x} - x_0\hat{p})} \equiv \hat{D}(x_0, p_0)$$

dargestellt werden. Drücke die Konstanten x_0 und p_0 durch m, ω und z aus.
Hinweis: Drücke $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ durch $\hat{x}$ und $\hat{p}$ aus. *(0.5 Punkte)*

b) Zeige

$$\hat{D}(x_0, p_0)\hat{x}\hat{D}^{-1}(x_0, p_0) = \hat{x} - x_0 I\,,$$
$$\hat{D}(x_0, p_0)\hat{p}\hat{D}^{-1}(x_0, p_0) = \hat{p} - p_0 I\,.$$

Hinweis: Eine Methode ist die Verwendung der Operatorbeziehung

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \ldots$$

(0.5 Punkte)

c) Ein *kohärenter Zustand* ist durch

$$|z\rangle \equiv \hat{D}(z)|0\rangle$$

definiert, wobei $|0\rangle$ der Grundzustand des harmonischen Oszillators ist. Berechne $\langle z|\hat{x}|z\rangle$ und $\langle z|\hat{p}|z\rangle$.
Hinweis: Benutze das Ergebnis aus b) und erinnere Dich, dass $\langle 0|\hat{x}|0\rangle = 0$ und $\langle 0|\hat{p}|0\rangle = 0$ gilt. *(0.5 Punkte)*

d) Zeige

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle, \quad \langle z|\hat{a}^\dagger = \langle z|z^* \,.$$

Hinweis: Benutze $\hat{D}(z)a\hat{D}(z)^{-1}\hat{D}(z)|0\rangle = 0$ und die Operatorbeziehung aus b). *(0.5 Punkte)*

e) Berechne $\langle z|\hat{x}^2|z\rangle$, $\langle z|\hat{p}^2|z\rangle$ und $\Delta x \Delta p$, wobei $\Delta x \equiv \sqrt{\langle \hat{x}^2\rangle - \langle \hat{x}\rangle^2}$.
Hinweis: Drücke $\hat{x}$ und $\hat{p}$ durch $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus und verwende die Kommutatorbeziehung und das Ergebnis aus d). *(1 Punkt)*

f) Zeige, dass das in c) definierte $|z\rangle$ durch

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

gegeben ist, wobei $|n\rangle$ der n-te Eigenzustand von $\hat{H}$ ist.
Hinweis: Benutze die Baker-Hausdorff-Beziehung

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \,.$$

(0.5 Punkte)

g) Nimm an, dass sich das System zur Anfangszeit ($t = 0$) im Zustand $|z\rangle$ befindet. Berechne der Zustand des System zur Zeit t

$$|z(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|z\rangle \,.$$

Hinweis: Benutze das Ergebnis aus f). *(0.5 Punkte)*

h) Nimm an, dass der Anfangszustand $|z\rangle$ ist. Berechne $\langle z(t)|\hat{x}|z(t)\rangle$, $\langle z(t)|\hat{p}|z(t)\rangle$ und $(\Delta x \Delta p)(t)$. Kohärente Zustände sind auch als "quasiklasische" Zustände des harmonischen Oszillators bekannt. Gib zwei Eigenschaften kohärenter Zustände an, die auf den Begriff "quasiklasisch" schließen lassen.
Hinweis: Benutze das Ergebnis aus g). *(1 Punkt)*

Übung 2 *Zweidimensionaler harmonischer Oszillator*

a) Berechne die Eigenenergie des isotropen zweidimensionalen harmonischen Oszillators

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \,.$$

Wie lautet die Entartung des n-ten Eigenzustands? *(1 Punkt)*

b) Berechne die Eigenenergie des anisotropen, $\omega_x \neq \omega_y$ zweidimensionalen harmonischen Oszillators

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{m}{2}\omega_x^2 \hat{x}^2 + \frac{m}{2}\omega_y^2 \hat{y}^2 \,.$$

Wie lautet die Entartung der Eigenzustände? *(2 Punkte)*

Übung 3 *Hermite-Polynome*

a) Zeige, dass die Funktion $f(z-\lambda) = e^{-\lambda^2+2\lambda z}$ die erzeugende Funktion der Hermite-Polynome ist, d.h.

$$e^{-\lambda^2+2\lambda z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(z) \,,$$

wobei $H_0(z) = 1$, $H_1(z) = 2z$, $H_2(z) = 4z^2 - 2$ usw. .
Hinweis: Benutze die Taylor-Entwicklung der erzeugenden Funktion $f(z-\lambda)$. (1 Punkt)

b) Leite die Rekursionsbeziehung

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z), \quad n = 2, 3, \cdots$$

her.
Hinweis: Benutze die Taylor-Entwicklung der Ableitung von $f(z-\lambda)$ nach λ. (1 Punkt)

c) Zeige die Rekursionsbeziehung

$$H_n'(z) = 2nH_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \cdots \,.$$

Leite danach die hermitesche Differenzialgleichung

$$H_n''(z) - 2zH_n'(z) + 2nH_n(z) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

her.
Hinweis: Benutze die Taylor-Entwicklung der Ableitung von $f(z-\lambda)$ nach z . (1 Punkt)

Übung 4 *Weiteres zu den Hermite-Polynomen*

a) Berechne und skizziere die ersten zwei und das sechste Hermite-Polynom sowie die entsprechenden Eigenzustände des harmonischen Oszillators in Ortsdarstellung. *(1 Punkt)*

b) Beweise durch Induktion, dass $H_n(z)$ ein Polynom n-ter Ordung ist. Argumentiere, dass die Eigenzustände $\phi_n(z)$ n Nullstellen haben. *(1 Punkt)*

c) Prüfe, ob $\phi_n(z)$ ein ozillierender Eigenzustand ist, wobei Minimum und Maximum der Amplitude an den Nullstellen von $\phi_{n-1}(z)$ auftreten. *(1 Punkt)*