Theoretische Physik für Quantentechnologien

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Prof. Dr. Giovanna Morigi

SS 2016 **18.04.2016**
Blatt 1 **Fälligkeitsdatum: 26.04.2016**

Aufgabe 1: Spin-1/2-Systeme (*15 Punkte*)

Zur Beschreibung von Spin-1/2-Systemen verwendet man üblicherweise die Paulimatrizen

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die beiden orthonormierten Spin-Eigenzustände werden üblicherweise mit $|+\rangle = |0\rangle = (1,0)^{\mathrm{T}}$ und $|-\rangle = |1\rangle = (0,1)^{\mathrm{T}}$ bezeichnet.

(a) Verwenden Sie die BraKet-Darstellung der Pauli-Matrizen, um die Kommutatorrelation

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l$$

herzuleiten. Hierbei wurde die Einsteinsche Summenkonvention verwendet. (*1 Punkt*)

(b) Skizzieren Sie das Stern-Gerlach-Experiment und erläutern Sie *stichpunktartig* die wichtigsten Hintergründe, Ergebnisse und Schlussfolgerungen (auch mathematisch). (*3 Punkte*)

(c) Befindet sich ein Spin-1/2-Teilchen in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{e}}_z$, so lässt sich dessen potentielle Energie schreiben als $W = -\gamma B_0 S_z$, wobei $S_z = \hbar/2\sigma_z$. Mithilfe der Frequenz $\omega_0 = -\gamma B_0$ lässt sich der Hamilton-Operator schreiben als

$$H = \omega_0 S_z.$$

(i) Geben Sie die Eigenwerte des Hamilton-Operators mit zugehörigen Eigenzuständen an. (*1 Punkt*)

(ii) Nehmen Sie an, dass sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi/2} |+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi/2} |-\rangle$$

befindet. Bestimmen Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$ zu einer beliebigen Zeit $t > 0$. (*1 Punkt*)

(iii) Beschreiben Sie die Bewegung des Spin-Systems. (*1 Punkt*)

(d) Wir betrachten nun den Fall, dass zusätzlich zum homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}_0$ ein periodisches Feld $\mathbf{B}_1$ vorliegt, das parallel zur $x-y-$Ebene ist:

$$\mathbf{B}_1 = B_1 \left(\hat{\mathbf{e}}_x \cos(\omega t) - \hat{\mathbf{e}}_y \sin(\omega t) \right)$$

Analog zu vorher lässt sich der entsprechende Anteil zum Hamilton-Operator schreiben als

$$H_1(t) = \omega_1 \left(\cos(\omega t) S_x - \sin(\omega t) S_y \right),$$

wobei $\omega_1 = -\gamma B_1$.

(i) Stellen Sie den Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ als Linearkombination der Basisvektoren dar,

$$|\psi(t)\rangle = c_+(t) |+\rangle + c_-(t) |-\rangle$$

und geben Sie das resultierende System von Differentialgleichungen an. (*1 Punkt*)

(ii) Führen Sie die Koeffizienten $\gamma_\pm(t)$ ein, sodass

$$c_\pm(t) = \gamma_\pm(t) e^{\mp i\omega_0 t/2}$$

und leiten Sie damit ein Differentialgleichungssystem für die $\gamma_\pm(t)$ her, das von $\delta \equiv \omega + \omega_0$ abhängt. Wir bezeichnen dieses System nun als Gleichungssystem (*). (*2 Punkte*)

(iii) Lösen Sie (*) im Resonanzfall ($\delta = 0$), wobei $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P_\pm(t)$, den Spin zur Zeit t im Zustand $|+\rangle$ bzw. $|-\rangle$ zu finden. Wie nennt man die beobachtete Dynamik? (*2 Punkte*)

(iv) Leiten Sie ausgehend von (*) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für γ_+ her, falls $\delta \neq 0$. (*1 Punkt*)

(v) Berechnen Sie mit der Anfangsbedingung $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ den Koeffizienten γ_+ in der Form

$$\gamma_+(t) = \lambda_+ e^{i\Omega_+ t} + \lambda_- e^{i\Omega_- t},$$

wobei $\Omega_\pm = \frac{1}{2}\left(\delta \pm \sqrt{\omega_1^2 + \delta^2}\right) = \frac{1}{2}(\delta \pm \Omega)$. (*2 Punkte*)

Aufgabe 2: Verschränktheit (*20 Punkte*)

Ein wichtiges Konzept in der Quanteninformation ist die Verschränktheit von Zuständen. Wir werden in dieser Aufgabe verschiedene Methoden kennenlernen, mit denen der Grad der Verschränktheit geprüft werden kann. Wir wollen Sie vorerst mit der typischen Schreibweise zusammengesetzter Systeme vertraut machen.
Wenn man zwei physikalische Systeme als ein kombiniertes System betrachtet, so ist der Hilbertraum des Gesamtsystems durch das Tensorprodukt der Hilberträume der beiden Einzelsysteme gegeben: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Befindet sich das erste System im Zustand $|\Psi\rangle_A$ und das zweite System in $|\Phi\rangle_B$, so schreibt man den Zustand des zusammengesetzten Systems nach Konvention folgendermaßen:

$$|\Psi\rangle_{AB} = |\Psi\rangle_A \otimes |\Phi\rangle_B .$$

Das Aufspalten des zusammengesetzten Zustandes in ein Produkt von Zuständen der jeweiligen Einzelsysteme ist im Allgemeinen nicht immer möglich. Falls diese Aufspaltung möglich ist, bezeichnet man einen Zustand als unverschränkt, falls nicht als verschränkt.

(a) Wir wollen hier verschiedene Zustände auf Verschränktheit überprüfen. Prüfen Sie dabei, ob sich folgende Zustände als Produktzustand schreiben lassen und folgern Sie daraus ob es sich um einen verschränkten oder einen unverschränkten Zustand handelt

(i) $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$ (*2 Punkte*)

(ii) $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$ (*2 Punkte*)

(iii) $|\Psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|11\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$ wobei $|a|^2 + |b|^2 = 1$ (*2 Punkte*)

(iv) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle\,|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle\,|-\alpha\rangle)$, $|\alpha\rangle$: kohärenter Zustand (*2 Punkte*)

(b) Wir wollen nun zwei weitere Möglichkeiten kennenlernen, die Verschränktheit eines Zustandes festzustellen. Dafür muss vorerst das Konzept der teilweisen Spur eingeführt werden. Sei ein System aus zwei Untersystemen zusammengesetzt, sodass wieder gilt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ und ein Zustand werde durch die Dichtematrix ρ beschrieben, so erhält man die verminderte Dichtematrix im System A durch Ausspuren des Systems B

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B(\rho) = \sum_{n=0}^{N} \langle n|\rho|n\rangle ,$$

wobei $\{n\}$ eine Basis des N-dimensionalen Hilbertraumes, der System B beschreibt, darstellt. Wir wollen weiterhin zwei spezifische Funktionen betrachten

$$\begin{aligned} \text{Von-Neumann Entropie:} \quad & S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \ln \rho) \\ \text{Reinheit:} \quad & P(\rho) = \mathrm{Tr}(\rho^2), \end{aligned}$$

mit deren Hilfe die Verschränktheit eines Zustandes näher untersucht werden kann. Zeigen Sie folgende Eigenschaften

(i) Zeigen Sie, dass $S = 0$ für einen reinen Zustand und $S = \ln d$ für einen vollständig gemischten Zustand, wobei d die Dimension der Dichtematrix angibt. Zeigen Sie weiterhin, dass diese Werte auch das Minimum respektive Maximum der Von-Neumann Entropie angeben. *(3 Punkte)*

(ii) Zeigen Sie, dass $P = 1$ für einen reinen Zustsand und $P = \frac{1}{d}$ für einen vollständig gemischten Zustand und dass diese Werte auch das Maximum respektive Minimum der Reinheit angeben. *(3 Punkte)*

(c) Ob ein Zustand beschränkt ist oder nicht, kann mittels der beiden eingeführten Funktionen und den in b)(i) und b)(ii) gezeigten Eigenschaften festgestellt werden. Es gilt

$$\begin{array}{ccccc} |\Psi\rangle_{AB} & \text{verschränkt} & \Leftrightarrow & \rho_A & \text{gemischt} \\ |\Psi\rangle_{AB} & \text{nicht verschränkt} & \Leftrightarrow & \rho_A & \text{rein} \end{array}$$

(i) Prüfen Sie mit Hilfe dieses Konzepts ihre Ergebnisse aus Aufgabe a)(i)-a)(ii). Nutzen Sie dazu die Von-Neumann Entropie S. *(3 Punkte)*

(ii) Verfahren Sie analog zur vorherigen Aufgabe aber nutzen Sie diesesmal die Reinheit P *(3 Punkte)*

Aufgabe 3: Klassische Boolesche Algebra (*15 Punkte*)

Ziel dieser Aufgabe ist es die klassische Boolesche Algebra zu wiederholen und einfache logische Schaltungen aufzubauen. Grundlage sind die *De Morganschen Gesetze*

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$
$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b.$$

Für weitere Informationen zu logischen Verknüpfungen wird auf die Internetseite `http://www.elektronik-kompendium.de/sites/dig/index.htm#2` verwiesen.

(a) Betrachten Sie die Wahrheitstabelle

A	B	Z
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

(i) Bilden Sie die *disjunktive Normalform (DNF)* und vereinfachen Sie die resultierende Funktion für den Ausgang Z, sofern möglich. *(1 Punkt)*

(ii) Formen Sie Ihr Ergebnis so um, dass Sie die logische Schaltung ausschließlich aus NAND Gattern aufbauen können und zeichnen Sie den entsprechenden Aufbau. *(2 Punkte)*

(b) Sie wollen nun den einfachsten Addierer für digitale Schaltungen aufbauen. Er soll in der Lage sein, zwei einstellige Dualzahlen A und B zu addieren, indem er Summe S und Übertrag Ü bildet.

(i) Geben Sie die zugehörige Wahrheitstabelle an und bestimmen Sie die Logikgleichungen sowohl für S als auch für Ü. (*2 Punkte*)

(ii) Welche Gatter identifizieren Sie in Ihrem Ergebnis? (*1 Punkt*)

(iii) Formen Sie auch diese Schaltung so um, dass Sie nur aus NAND Gattern aufgebaut werden kann und zeichnen Sie das Schaltbild. (*2 Punkte*)

(c) Sie möchten Ihre Additionsschaltung nun derart erweitern, dass drei einstellige Dualzahlen A, B und C addiert werden können.

(i) Geben Sie die Wahrheitstabelle an und bestimmen Sie die DNF. Vereinfachen Sie soweit wie möglich. (*2 Punkte*)

(ii) Bauen Sie die Schaltung ausschließlich aus NOR Gattern auf. (*2 Punkte*)

(d) Wir möchten nun noch die Umkehrbarkeit von klassischen Gattern untersuchen.

(i) Welche der Gatter NOT, AND, OR, NAND, NOR, XOR sind reversibel? (*1 Punkt*)

(ii) Welche grundlegende Bedingung muss erfüllt sein, damit ein Gatter umkehrbar sein kann? Nennen Sie ein Beispiel, das nicht bereits in Teil (i) vorkommt. (*2 Punkte*)

Aufgabe 4: Quantengatter (*10 Punkte*)

Analog zum klassischen Computer gibt es auch im Quantencomputer das Konzept der Gatter. Diese werden als Quantengatter bezeichnet und beschreiben wie im klassischen Fall Operationen, die auf die einzelenen Quantenbits ausgeführt werden. In dieser Aufgabe wollen wir uns auf 1- bis 3-Qubit Gatter konzentrieren. Die Gatter werden dabei als Matrizen in den Basen $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ für 1-Qubit Gatter, $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ für 2-Qubit Gatter und $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$ für 3-Qubit Gatter dargestellt. Folgende Gatter sollen in dieser Aufgabe untersucht werden:

$$\text{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{FREDKIN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Im Gegensatz zum klassischen Computer, sind alle Gatter die in einem Quantencomputer realisiert werden können reversibel. Das heißt es existiert ein inverses Gatter, dass die Operation des ursprünglichen Gatters rückgängig macht. Zeigen Sie, dass alle oben aufgeführten Gatter reversibel sind (*1 Punkt*).

(b) Wir wollen nun die Wirkung der obigen Gatter näher betrachten. Untersuchen Sie die Wirkung...

(i) des NOT Gatters auf den Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ (*1 Punkt*)

(ii) des CNOT Gatters auf den Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ (*1 Punkt*)

(iii) des SWAP Gatters auf den Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ (*1 Punkt*)

(iv) des FREDKIN Gatters auf den Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$ (*1 Punkt*)

(c) Für einen universellen Satz von Gattern, durch deren Kombination jede beliebige Operation in einem Quantencomputer ausgeführt werden kann wird immer ein verschränkendes Gatter benötigt. Letzteres bezeichnet ein Gatter, dass aus einem nicht verschränkten Zustand einen verschränkten Zustand erzeugen kann.

   (i) Zeigen Sie, dass CNOT ein solches verschränkendes Gatter ist. (*2 Punkte*)

   (ii) Ein weiteres solches Gatter ist $\sqrt{\text{SWAP}}$, welches die Eigenschaft besitzt $\sqrt{\text{SWAP}} \cdot \sqrt{\text{SWAP}} = \text{SWAP}$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung dieses Gatters. (*3 Punkte*)