Theoretische Physik für Quantentechnologien

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Prof. Dr. Giovanna Morigi

SS 2016 **04.05.2016**
Blatt 2.1 **Fälligkeitsdatum: 12.05.2016**

***Achtung**: Ihre Lösungen sind bis spätestens Donnerstag, 12.05. um 14:00 in den Briefkasten der Gruppe Wilhelm-Mauch im Erdgeschoss von E2.6 einzuwerfen. Tackern Sie Ihre Lösungen zusammen. Nächste Woche werden nach den Vorlesungen zwei weitere Aufgaben folgen, die in der kommenden Übung am 17.05. abzugeben sind.*

Aufgabe 1: Konstruktion von Quantengattern, 15 Punkte

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ und M eine Matrix mit der Eigenschaft, dass $M^2 = \mathbb{1}$. Zeigen Sie damit, dass $\exp(ixM) = \cos(x)\,\mathbb{1} + i\sin(x)\,M$. (*2 Punkte*)

(b) Verwenden Sie Teil (a), um das Hadamard-Gatter

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

durch eine Abfolge von Einzel-Qubit-Rotationen (X,Y oder Z) darzustellen. (*2 Punkte*)

Hinweis: Bedenken Sie, dass globale Phasen irrelevant sind.

(c) Weisen Sie die folgenden drei Identitäten nach: (*3 Punkte*)

$$HXH = Z, \qquad HYH = -Y, \qquad HZH = X$$

(d) Leiten Sie her, wie das controlled-Z (CZ) Gatter in ein controlled-NOT (CNOT) überführt werden kann. Nutzen Sie dazu die Identitäten aus Teil (c). (*3 Punkte*)

(e) Wie lautet die Beziehung zwischen SWAP, FREDKIN und TOFFOLI Gatter? Nutzen Sie dies, um sowohl das FREDKIN Gatter als auch das TOFFOLI Gatter ausschließlich aus CNOT Gattern und ggf. Einzel-Qubit-Rotationen zu generieren. (*5 Punkte*)

Aufgabe 2: Deutsch-Josza Algorithmus, 15 Punkte

Wir haben in der Vorlesung bereits den Deutsch Algorithmus kennengelernt. Da dieser in seiner Anwendung sehr begrenzt ist wollen wir in dieser Aufgave den allgemeineren Deutsch-Josza Algorithmus untersuchen. Wir betrachten die binäre Funktion

$$f : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\},$$

wobei n eine beliebige positive ganze Zahl ist. f soll eine der beiden folgenden Eigenschaften besitzen:

1) f ist **konstant**. Mit anderen Worten, entweder $f(x) = 0\ \forall\ x \in \{0,1\}^n$ oder $f(x) = 1\ \forall\ x \in \{0,1\}^n$.

2) f ist **ausgeglichen**. Das heißt die Anzahl der $x \in \{0,1\}^n$ für die $f(x) = 0$ ist gleich der Anzahl für die $f(x) = 1$:

$$|\{x \in \{0,1\}^n : f(x) = 0\}| = |\{x \in \{0,1\}^n : f(x) = 1\}| = 2^{n-1}$$

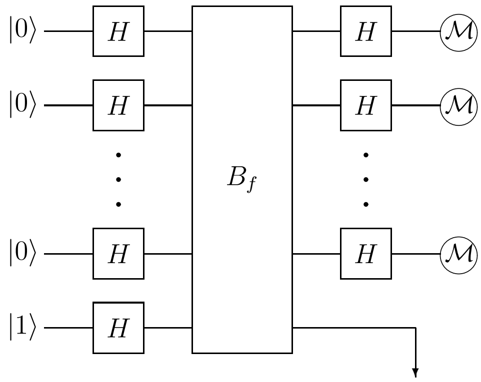

Abbildung 1: Gattersequenz des Deutsch-Josza Algorithmus.

Ziel des Algorithums ist es, zu bestimmen welche der beiden Eigenschaften die Funktion besitzt. Analog zum Deutsch-Algorithmus nehmen wir an, dass wir Zugang zur Funktion über eine unitäres Gatter B_f mit folgender Eigenschaft haben:

$$B_f |x\rangle |b\rangle = |x\rangle |b \oplus f(x)\rangle$$

für alle $x \in \{0,1\}^n$ und $b \in \{0,1\}$.

(a) Wie könnte man klassisch bestimmen welche Eigenschaft die Funktion besitzt und wie würde dieser klassische Algorithmus mit n skalieren? *(1 Punkt)*

(b) Würde man klassisch einfach k Bits mit $k < n$ auswählen und die Eigenschaft der Funktion testen, wie groß wäre der Fehler in Abhängigkeit von k und n. *(2 Punkte)*

Bevor wir den Deutsch-Josza Algorithmus untersuchen wollen wir zuerst die Wirkung der n Hadamard Gatter auf den Eingangszustand untersuchen. Wir wissen bereits aus der Vorlesung, das für $a \in \{0,1\}$ gilt

$$H |a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (-1)a |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{b \in \{0,1\}} (-1)^{ab} |b\rangle$$

(c) Wie sieht der Ausgangszustand aus, wenn man jeweils ein Hadamard Gatter auf zwei Qubits die in $x \in \{0,1\}$ starten anwendet? *(1 Punkt)*

(d) Verallgemeineren Sie dieses Ergebnis auf n Qubits und zeigen Sie dass in diesem Fall gilt:

$$H \otimes H ...(n - mal)... \otimes H |x\rangle = H^{\otimes n} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y \in \{0,1\}^n} (-1)^{xy} |y\rangle ,$$

wobei $xy = \sum_{i=1}^n x_i y_i \pmod 2$. *(3 Punkte)*

(e) Wenden Sie nun B_f auf den aus der Hadamard Transfomration resultierenden Zustand an und zeigen Sie, dass der in Abb. 1 dargestellte Deutsch-Josza Algorithmus als Endzustand den folgenden besitzt:

$$\sum_{y \in \{0,1\}^n} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x)+xy} |y\rangle \right)$$

(3 Punkte)

(f) Untersuchen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich alle Qubits bei der finalen Messung im Zustand $|0\rangle$ befinden und zeigen Sie, dass für diese gilt

$$P(0) = \left| \frac{1}{2^n} \sum_{x \in 0,1^n} (-1)^{f(x)} \right|^2$$

(3 Punkte)

(g) Zeigen Sie, dass so mit einer Messung festgestellt werden kann ob die Funktion konstant oder ausgeglichen ist. *(2 Punkte)*