Theoretische Physik für Quantentechnologien

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Prof. Dr. Giovanna Morigi

SS 2016 **20.06.2016**
Blatt 4 **Fälligkeitsdatum: 27.06.2016**

Achtung: *Sie werden aus organisatorischen Gründen Ihre Lösungen immer zu Beginn der jeweiligen Übung abgeben, die zukünftig montags stattfinden werden.*

Aufgabe 1: Fehlerkorrektur - einfache Beispiele (*40 Punkte*)

Wie Sie in der Vorlesung bereits besprochen haben, ist die Fehlerkorrektur ein wichtiger Bestandteil zur Realisierung eines Quantencomputers. Wir wollen in dieser Aufgabe Fehlerkorrekturalgorithmen untersuchen. Als erstes Beispiel wollen wir einen Algorithmus zur Korrektur von Bit-Flip Fehlern (bspw. $|0\rangle \longrightarrow |1\rangle$) untersuchen. Dafür kodieren wir die logische 0 und 1 mithilfe dreier Qubits folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
|0\rangle &\longrightarrow |0_L\rangle = |000\rangle \\
|1\rangle &\longrightarrow |1_L\rangle = |111\rangle \, .
\end{aligned}$$

a) Nehmen Sie an ein Qubit $|\Psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ werde in obiger weiße kodiert, d.h. $|\Psi\rangle \longrightarrow a\,|0_L\rangle + b\,|1_L\rangle$. Welche Bit-Flip Fehler können auftreten und welche können Sie wie feststellen? (*7 Punkte*)

b) Sie wissen nun welche Bit-Flip Fehler Sie detektieren können. Wie viele und welche Messungen müssen zur eindeutigen Feststellung dieser Fehler gemacht werden? Die Messergebnisse werden als Syndrome bezeichnet und die zugehörigen Messoperatoren nennt man Stabilisatoren. (*6 Punkte*)

c) Die in b) durchgeführte Messung darf keinerlei Rückschlüsse auf die Werte von a oder b geben. Wieso ist das wichtig? (*2 Punkte*)

d) Mittels welcher Gatter können die detektierten Fehler jeweils wieder korrigiert werden? (*4 Punkte*)

e) Nehmen Sie nun an, dass ein Bit-Flip mit Wahrscheinlichkeit p auftritt. Wie groß ist damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler, der von obigem Schema nicht korrigiert werden kann, wenn Bit-Flips die einzig mögliche Fehlerquelle sind? (*4 Punkte*)

Der zweite mögliche diskrete Fehler, der in einem Quantencomputer auftreten kann ist ein Phasenflip (bspw. $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \longrightarrow (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$). Zur Feststellung eines solchen Phasenflips kodieren wir die logische 0 und 1 wie folgt:

$$\begin{aligned}
|0\rangle &\longrightarrow |0_L\rangle = |+++\rangle \\
|1\rangle &\longrightarrow |1_L\rangle = |---\rangle \, ,
\end{aligned}$$

wobei $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ und $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ die Eigenzustände zum Pauli-Operator $\hat{X}$ bezeichnen.

f) Zeigen Sie, dass man mit dieser Kodierung analog zum Bit-Flip im vorherigen Beispiel Phasenflips detektieren kann. Wie sehen die zugehörigen Stabilisatoren aus und mit welchen Gattern können die jeweiligen Fehler korrigiert werden? (*10 Punkte*)

Da wir in einem Quantencomputer ein Kontinuum an möglichen Zuständen haben (Blochsphäre), müssen die auftretenden Fehler nicht diskret sein. Ein möglicher Fehlern kann bspw. eine extrem kleine Rotation um die z-Achse der Blochsphäre sein. Dies wäre problematisch, da wir mit obigen Schemen nur diskrete Fehler korrigieren können. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass durch die Korrektur der beiden oben genannten Fehler automatisch alle Fehler, die auftreten können, korrigiert werden.

g) Zeigen Sie, dass ein Fehlerkorrekturalgorithmus, der gleichzeitig Bit- und Phasenflips korrigiert jeden beliebigen Fehler korrigieren kann. Beschränken Sie sich dabei auf Fehler auf dem ersten Qubit. (*7 Punkte*)

   Hinweis: Sie wissen bereits, dass die Wirkung eines Fehlers auf einen beliebigen Zustand geschrieben werden kann als $\mathcal{E}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_i E_i |\Psi\rangle\langle\Psi| E_i^\dagger$. Betrachten Sie ein Element aus dieser Summe und nutzen Sie, dass E_i nur auf das erste Qubit wirkt und somit durch die Identität und die Paulioperatoren ausgedrückt werden kann.

Aufgabe 2: Fehlerkorrektur - einfache Beispiele (*10 Punkte*)

In Aufgabe 1 haben wir gesehen, dass ein Algorithmus, der gleichzeitig Bit-Flip und Phasenflip korrigiert auch entsprechende kontinuierliche Fehler korrigieren kann. Der einfachste solche Algorithmus ist der sogenannte Shor-Algorithmus. Dabei wird ein logisches Qubit mit neun Data-Qubits folgendermaßen kodiert (siehe Abb. 1)

$$|0\rangle \longrightarrow |0_L\rangle = \frac{(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)}{2\sqrt{2}}$$
$$|1\rangle \longrightarrow |1_L\rangle = \frac{(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)}{2\sqrt{2}}$$

a) Zeigen Sie, dass die Syndrom Messungen, um einen Phasenflip in diesem Algorithmus festzustellen, der Messung der Observablen $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ und $X_4X_5X_6X_7X_8X_9$ entspricht. Der Index gibt an auf welches Qubit der Operator wirkt. Geben Sie die verschiedenen möglichen Messresultate mit zugehörigem Fehler an (*5 Punkte*)

b) Zeigen Sie, dass ein Phasenflip in einem beliebigen der ersten drei Qubits mit dem Operator $Z_1Z_2Z_3$ korrigiert wird. (*5 Punkte*)

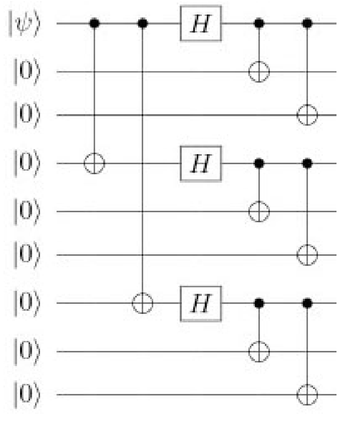

Abbildung 1: Codierungssequenz für den 9-Qubit Shorcode.