Theoretische Physik für Quantentechnologien

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Prof. Dr. Giovanna Morigi

SS 2016 | **30.06.2016**
Blatt 5 | **Fälligkeitsdatum: 11.07.2016**

Achtung: *Sie werden aus organisatorischen Gründen Ihre Lösungen immer zu Beginn der jeweiligen Übung abgeben, die zukünftig montags stattfinden werden.*

Aufgabe 1: Blochgleichung und Spektrallinien (*20 Punkte*)

Die Entwicklung eines Spins im Magnetfeld $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ durch Präzession und Relaxation wird beschrieben durch die Bloch-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} & \gamma B_z & \gamma B_y \\ -\gamma B_z & -\frac{1}{T_2} & \gamma B_x \\ -\gamma B_y & -\gamma B_x & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_0}{T_1} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Hierbei sind die M_i die Komponenten der Magnetisierung $\mathbf{M}$ und γ das gyromagnetische Verhältnis. T_1 ist die longitudinale, T_2 die transversale Relaxationszeit. Nehmen Sie im Folgenden ein Magnetfeld der Form $\mathbf{B} = (B_1 \cos(\omega t), B_1 \sin(\omega t), B_0)$ mit konstanten Amplituden B_0, B_1 an.

(a) Leiten Sie explizit die Form aller Blochgleichungen – ausgehend von Gleichungssystem (1) – im rotierenden Bezugssystem her, indem Sie die neuen Größen

$$u = M_x \cos(\omega t) - M_y \sin(\omega t),$$
$$v = M_x \sin(\omega t) + M_y \cos(\omega t)$$

einführen. (*6 Punkte*)

Hinweis: Das Einführen der Größen $\omega_{0,1} = \gamma B_{0,1}$ und $\delta\omega = \omega_0 - \omega$ könnte nützlich sein.

(b) Bestimmen Sie die stationären Lösungen innerhalb des rotierenden Bezugssystems. (*5 Punkte*)

(c) Wie lauten die stationären Lösungen im Grenzfall eines schwach oszillierenden Feldes, d.h. $\omega_1^2 T_1 T_2 \ll 1$? (*3 Punkte*)

Je nachdem, ob mit dem Signal für u oder v aus Teil b) gearbeitet wird, bezeichnet man das Signal als Dispersion oder Absorption. Wir werden uns im Weiteren Teil nur auf den Betrieb im Absorptionsmodus beschränken.

(d) Tragen Sie für das Absorptionssignal sowohl die Amplitude, als auch die FWHM als Funktion der Rabifrequenz ω_1 auf. Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle

(i) $T_2 = 2\,T_1$ (*3 Punkte*)

(ii) $T_2 \ll T_1$ (*3 Punkte*)

und achten Sie darauf, dass die Regionen $\omega_1 \ll 1/T_2$ und $\omega_1 > 1/T_2$ ausreichend gut erkennbar sind.

Aufgabe 2: Rabioszillationen auf Blochkugel (*15 Punkte*)

Auf Blatt 1 haben wir bereits Rabioszillationen untersucht. Der Hamilton im Laborsystem lautet

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\omega_0 & \omega_1 e^{i\omega t} \\ \omega_1 e^{-i\omega t} & \omega_0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Wir nehmen an, dass die relevanten Frequenzen durch $\omega_0/2\pi = 0.25$ GHz und $\omega_1 = \omega_0/5$ gegeben sind.

(a) Transfomieren Sie Gleichung (2) in ein mit ω_0 rotierendes Bezugssystem und geben Sie den entsprechenden Hamiltonian an. *(3 Punkte)*

(b) Stellen Sie die Dynamik (für $T_{1,2} \to \infty$) im rotierenden Bezugssystem auf der Blochkugel grafisch dar. Nehmen Sie dazu an, dass das System sich zu Beginn im Zustand $|1\rangle$ befindet und unterscheiden Sie die Fälle

  (i) $\Delta = 0$, wobei $\Delta \equiv \omega - \omega_0$ *(3 Punkte)*

  (ii) $\Delta = 2\omega_1$ *(3 Punkte)*

(c) Verfahren Sie analog zu Teil b) im Laborsystem. *(6 Punkte)*

Aufgabe 3: Ramsey Experiment (*15 Punkte*)

Betrachten Sie die folgende Pulssequenz:

1. Rabi Puls um den Winkel $\frac{\pi}{2}$
2. Freie Zeitentwicklung mit Dauer T
3. Rabi Puls (in Phase mit dem ersten Puls) um den Winkel $\frac{\pi}{2}$

a) Nehmen Sie an, dass es sich um resonante Rabi-Pulse handelt. Wie sieht dann der Endzustand aus? *(4 Punkte)*

b) Nehmen Sie nun an die Rabi Pulse wären leicht verstimmt, d.h. $|\delta| = |\omega - \omega_0| \ll \Omega$. Wie sieht in diesem Fall der Endzustand aus? *(5 Punkte)*

c) Nehmen Sie nun eine beliebig große Verstimmung an. Leiten Sie die allgemeine Besetzungswahrscheinlichkeit für den ersten angeregten Zustand her. Skizzieren Sie diese. *(6 Punkte)*

Aufgabe 4: Rosa Rauschen (*10 Punkte*)

Betrachten Sie den Hamiltonoperator $\hat{H} = (\omega + f(t))\,\hat{\sigma}_z$, wobei $f(t)$ eine Zufallsvariable ist, mit

$$\langle f(t) \rangle = 0$$

$$S(\omega) = \langle f(t) f(0) \rangle_\omega = \begin{cases} \frac{\alpha}{\omega} & \text{falls} \quad \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t)$ des Systems, sowie den gemittelten Zeitentwicklungsoperator $\left\langle \hat{U} \right\rangle_{f(t)}$. Nutzen Sie dazu die Identität der Gauß'schen Zufallsvariablen, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben. *(5 Punkte)*

b) Berechnen Sie nun den Zeitentwicklungsoperator für ein Spin-Echo-Experiment $\left\langle \hat{U}_{f(2t,t)} \hat{\sigma}_x \hat{U}_{f(t,0)} \right\rangle$ und diskutieren Sie das Ergebnis. *(5 Punkte)*