Theoretische Physik für Quantentechnologien

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Prof. Dr. Giovanna Morigi

SS 2016 **11.07.2016**
Blatt 6 **Fälligkeitsdatum: 18.07.2016**

***Achtung**: Sie werden aus organisatorischen Gründen Ihre Lösungen immer zu Beginn der jeweiligen Übung abgeben, die zukünftig montags stattfinden werden.*

Aufgabe 1: Franck-Condon-Koeffizienten (*15 Punkte*)

Das Absorptionsspektrum eines Systems liefert Informationen darüber, wie das System auf eingestrahltes Laserlicht reagiert. Um das Absorbtionsspektrum zu bestimmen, müssen die Frank-Condon-Koeffizienten

$$f_{nl} = \langle n| \exp\left(ik\hat{\mathrm{x}}\right) |l\rangle$$

berechnet werden.

(a) Drücken Sie den Operator $\exp\left(ik\hat{\mathrm{x}}\right)$ durch Auf- und Absteigeroperatoren $\hat{\mathrm{a}}, \hat{\mathrm{a}}^\dagger$ sowie dem Lamb-Dicke Parameter $\eta = k/\sqrt{2m\nu}$ aus, wobei k die Wellenzahl des Lasers, m die Ionenmasse und ν die Fallenfrequenz bezeichnen. (*1 Punkt*)

(b) Berechnen Sie die Koeffizienten f_{nl} im Lamb-Dicke Regime, d.h. für $\sqrt{n}\eta \ll 1$. Es reicht eine Entwicklung bis zur ersten Ordnung in η durchzuführen. (*2 Punkte*)

(c) Berechnen Sie nun die Franck-Condon-Koeffizienten für den allgemeinen Fall. (*12 Punkte*)

Hinweis: Es könnte nützlich sein, den Verschiebungsoperator $\hat{\mathrm{D}}(\alpha)$ zu verwenden, der u.a. folgende Eigenschaft besitzt: $\hat{\mathrm{D}}(\alpha)\,|0\rangle = |\alpha\rangle$, wobei $|\alpha\rangle$ ein kohärenter Zustand ist.

Aufgabe 2: Translationsoperator (*8 Punkte*)

(a) Leiten Sie einen geschlossenen Ausdruck für den Kommutator $[\hat{\mathrm{p}}, \hat{\mathrm{x}}^n]$ her. (*2 Punkte*)

(b) Bestimmen Sie $[\hat{\mathrm{p}}, \exp\left(ik\hat{\mathrm{x}}\right)]$. (*2 Punkte*)

(c) Zeigen Sie mit Ihren Ergebnissen aus a) und b), dass die Relation

$$\exp\left(ik\hat{\mathrm{x}}\right)|p\rangle = |p + \hbar k\rangle$$

gilt. (*4 Punkte*)

Aufgabe 3: Zwei Ionen in einer linearen Falle (*15 Punkte*)

Zwei Calcium Ionen befinden sich auf einer Linie entlang der z-Achse in einer linearen Paul Falle

a) Die zwei Endkappenelektroden entland der z-Achse erzeugen ein Gleichstrompotenzial

$$\Phi = \Phi_0 + a_2\left(z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right),$$

mit Konstante a_2. Berechnen Sie die Eigenfrequenz ω_z. (*5 Punkte*)

b) Die Verschiebungen z_1 und z_2 der zwei Ionen bezüglich des Fallenzentrums gehorchen den Gleichungen

$$M\ddot{z}_1 = -M\omega_z^2 z_1 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(z_2-z_1)^2}$$
$$M\ddot{z}_2 = -M\omega_z^2 z_2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(z_2-z_1)^2},$$

mit Ionenmasse M. Begründen Sie die Form der Gleichungen und zeigen Sie, dass das Massenzentrum $z_{cm} = \frac{z_1+z_2}{2}$ mit der Frequenz ω_z oszilliert. *(5 Punkte)*

c) Berechnen Sie den Gleichgewichtsabstand a von zwei einfach geladenen Ionen in der Falle. *(5 Punkte)*