Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 10

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018 **Abgabe 11.01.2017**

Aufgabe 1: Klassifizierung von DGLs (*5 Punkte*)

Klassifizieren Sie folgende DGLs. Geben Sie dazu deren Ordnung an und ob die DGLs

- linear
- homogen

sind. Im Falle linearer DGLs: Wie viele Fundamentallösungen gibt es, und wie viele Anfangsbedingungen werden daher benötigt, damit die zugehörige Lösung eindeutig ist?

(a) $\ddot{x} + g/l \sin(x) = 0$ (*1,5 Punkte*)

(b) $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t}$ (*2 Punkte*)

(c) $\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$. (*1,5 Punkte*)

Aufgabe 2: Separable DGL/Trennung der Veränderlichen (*16 Punkte*)

In der klassischen Punktmechanik treten im Falle von Erhaltungsgrößen DGLs der Form

$$\dot{x}(t) = f(t)g(x)$$

für die zeitabhängige Größe $x(t)$ (diese muss nicht unbedingt den Ort repräsentieren) häufig auf. Dabei sind f bzw. g gegeben Funktionen, die *nur* von der Zeit bzw. von der gesuchten Größe $x(t)$ abhängen. (Aufgrund dessen können in obiger DGL die Variablen t und x getrennt werden, wovon der Name kommt – eine weitere häufige Bezeichnung ist separabel.) Die Lösung zu obiger DGL mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ für ein gegebenes x_0 lautet

$$x(t) = G^{-1}(F(t)) \tag{1}$$

mit

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(t')\mathrm{d}t'$$
$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(x')}\mathrm{d}x'.$$

(a) $^{(\star)}$ Zeigen Sie, dass das mit Gl. (1) gegebene $x(t)$ die obige DGL samt Anfangsbedingung löst. Wann ist die Existenz einer Lösung in Form von Gl. (1) garantiert? (*2 Punkte*)

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP)

$$y'(x) = \frac{y(x)}{1-x} + x - 1, \qquad x > 1, \quad y(2) = 0.$$

(*6 Punkte*)

Hinweis: Verwenden Sie zusätzlich Variation der Konstanten.

(c) $^{(\bigstar)}$ Lösen Sie das AWP

$$y'(x) = 2x\mathrm{e}^{-y}, \qquad y(0) = 0.$$

(*4 Punkte*)

(d) Betrachten Sie ein mathematisches Pendel mit Länge l, welches sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der unteren Gleichgewichtsposition $\phi(0) = 0$ befindet und gerade ausreichend kinetische Energie besitzt, um die obere (instabile) Gleichgewichtsposition $\phi = \pi$ mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi} = 0$ zu erreichen. Geben Sie den Energieerhaltungssatz eines solchen Pendels an und zeigen damit, dass die Bewegungsgleichung des Pendels lautet

$$\dot{\phi} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Lösen Sie diese DGL mit der gegeben Anfangsbedingung. (*4 Punkte*)
Hinweis: Eine Stammfunktion zu $1/\cos(x)$ ist $\ln(\tan[(2x+\pi)/4])$.

Aufgabe 3: DGL – Gemischtes

Lösen Sie folgende AWPs:

(a) $y'(x) = -\frac{y(x)}{x} + 1, \qquad y(2) = \frac{3}{2}$ (*3 Punkte*)

(b) $\ddot{x} - \omega_0^2 x(t) = 0, \qquad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = -\omega x_0.$ (*3 Punkte*)

(c) $y'(x) = -xy(x) + x, \qquad y(0) = 0$ (*3 Punkte*)

Aufgabe 4: Planetenbahnen (*10 Punkte*)

Wir möchten in dieser Aufgabe die Bahnkurve eines Planeten der Masse m im Gravitationsfeld der Sonne berechnen. Dazu nutzen wir aus, dass die Gesamtenergie $E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$ und der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ des Planeten zeitlich konstant sind. Da die Bewegung in einer Ebene verläuft, benutzen wir zur Beschreibung die Polarkoordinaten $\{r, \phi\}$ mit dem Koordinatenursprung in der Sonne. Die kinetische Energie ist in diesen Koordinaten durch

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\left(v_r^2 + v_\phi^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right)$$

gegeben und der (konstante) Betrag des Drehimpulses ist

$$L = mr^2\dot{\phi}.$$

(a) Stellen Sie den Energieerhaltungssatz des Problems in Polarkoordinaten dar. (*1 Punkt*)

(b) Bestimmen Sie $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ sowie $\dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$. (*1,5 Punkte*)

(c) Benutzen Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil (b) um zu zeigen, dass

$$\phi(r) = \phi_0 + \frac{L}{m}\int \frac{1}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_{\text{pot}} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}\mathrm{d}r$$

gilt. *Hinweis:* Trennung der Variablen! (*1,5 Punkte*)

(d) Es sei im Folgenden $\phi_0 = 0$ und

$$E_{\text{pot}} = -\frac{Gm^2M}{r}.$$

Die Lösung des Integrals hat dann die Form

$$\phi(r) = \arccos\left(\frac{p(r)}{q(r)}\right).$$

Finden Sie die Ausdrücke für p und q. (*2 Punkte*)

(e) $^{(\bigstar)}$ Lösen Sie den gefundenen Ausdruck auf um zu zeigen, dass

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \epsilon \cdot \cos(\phi)}{a\,(1 - \epsilon^2)}.$$

Wie sind dabei die Konstanten a und ϵ definiert? *(2 Punkte)*

(f) $^{(\bigstar)}$ Welche Bahnkurven ergeben sich für die Fälle $\epsilon = 0$, $0 < \epsilon < 1$, $\epsilon = 1$ und $\epsilon > 1$? *(2 Punkte)*