Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 11

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018 **Abgabe 18.01.2017**

Aufgabe 1: Differentialgleichungssysteme (*10 Punkte*)

Beispielaufgabe: Rabi-Oszillationen

Wir betrachten ein Ensemble aus Spin-1/2-Teilchen in einem statischen und homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}$, das in z-Richtung zeigt. Zusätzlich legen wir ein zeitlich veränderliches Wechselfeld an. Wir interessieren und für die Besetzungen der Zustände Spin up $c_\uparrow(t)$ und Spin down $c_\downarrow(t)$. Dieses System wird beschrieben durch das Differentialgleichungssystem (die Herleitung sparen wir uns)

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_\uparrow(t) \\ \dot{c}_\downarrow(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon & \Delta \\ \Delta & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\uparrow(t) \\ c_\downarrow(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Hierbei bezeichnen ϵ und Δ Konstanten mit der Einheit Frequenz.

(a) Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem (1) explizit in Komponenten aus.

(b) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem (1) für den Fall $\epsilon = 0$ mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} c_\uparrow(0) \\ c_\downarrow(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe: Bloch-Gleichungen

Die Bloch-Gleichungen sind ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem, das die Zeitabhängigkeit der Magnetisierung $\mathbf{M}$ von magnetischen Kreiseln beschreibt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{M} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}. \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{B}$ die magnetische Flussdichte und γ ist eine reelle Proportionalitätskonstante. Die Bloch-Gleichungen sind unter anderem in der Kernspintomographie von großer Bedeutung.

(a) Schreiben Sie die Bloch-Gleichungen (2) explizit als Differentialgleichungssystem aus. (*2 Punkte*)

(b) Es sei $\mathbf{B}$ statisch und homogen. Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass $\mathbf{B}$ entlang der z-Achse zeigt. Wie lauten die Bloch-Gleichungen (2) dann? (*2 Punkte*)

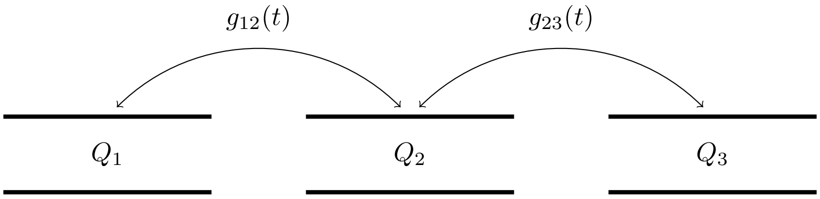
(c) Entkoppeln Sie das erhaltene Differentialgleichungssystem und lösen Sie es für den Anfangswert

$$\begin{pmatrix} M_x(t=0) \\ M_y(t=0) \\ M_z(t=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und skizzieren sie die zeitlichen Verläufe von $M_x(t), M_y(t)$ und $M_z(t)$. (*6 Punkte*)

Aufgabe 2: Resonant gekoppelte Qubits (*17 Punkte*)

In der Quantenmechanik ist die fundamentale Gleichung die nach Erwin Schrödinger benannte *Schrödingergleichung*. Jedes abgeschlossene quantenmechanische System folgt eben dieser Differentialgleichung. In der Quanteninformation verwendet man sogenannte *Qubits* (quantenmechanische Systeme mit zwei unterschiedlichen Energiezuständen) als elementares Bauteil zur Konstruktion eines *Quantencomputers*, dessen Realisierung ein großer Forschungsschwerpunkt der Physik in Saarbrücken ist. Wir wollen hier ein einfaches Beispiel untersuchen. Wie in der Abbildung gezeigt nehmen wir an, wir haben drei Qubits (angedeutet durch zwei schwarze Striche) in einer Reihe mit jeweils ihren nächsten Nachbarn mit zeitlich veränderlichen Kopplungsstärken $g_{12}(t) \geq 0$ und $g_{23}(t) \geq 0$ gekoppelt. Den Energienullpunkt wählen wir so, dass der jeweils untere Zustand (der untere Strich) bei 0 liegt, der obere Zustand jeweils bei derselben Konstanten E.



Die Schrödingergleichung lautet für dieses System (Die Herleitung ersparen wir uns an dieser Stelle):

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ Q_3(t) \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} E & g_{12}(t) & 0 \\ g_{12}(t) & E & g_{23}(t) \\ 0 & g_{23}(t) & E \end{pmatrix}}^{=:H} \begin{pmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ Q_3(t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Hierbei gilt $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ mit dem Plancksche Wirkungsquantum h. Die Vektoreinträge $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ und $Q_3(t)$ beschreiben die Besetzung des jeweiligen Qubits zum Zeitpunkt t.

(a) $^{(\star)}$ Es gelte

$$g_{12}(t) \frac{\partial}{\partial t} g_{23}(t) - g_{23}(t) \frac{\partial}{\partial t} g_{12}(t) = 0. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass die Matrix H dann in der Form

$$H = SD(t)S^{\mathrm{T}}$$

mit einer zeitunabhängigen Basiswechselmatrix S diagonalisiert werden kann. (*8 Punkte*)

(b) $^{(\star)}$ Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$g_{12}(t) := \begin{cases} g(1 - \cos(\Omega t)) & \text{für } \frac{2\pi n}{\Omega} \leq t \leq \frac{2\pi(n+1)}{\Omega} \text{ mit } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } \frac{2\pi n}{\Omega} \leq t \leq \frac{2\pi(n+1)}{\Omega} \text{ mit } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$g_{23}(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{2\pi n}{\Omega} \leq t \leq \frac{2\pi(n+1)}{\Omega} \text{ mit } n \text{ gerade} \\ g(1 - \cos(\Omega t)) & \text{für } \frac{2\pi n}{\Omega} \leq t \leq \frac{2\pi(n+1)}{\Omega} \text{ mit } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

die Bedingung (4) erfüllen. Hierbei sind g und Ω Konstanten. (*2 Punkte*)

(c) Lösen Sie die Schrödingergleichung (3) mit den Funktionen aus (b) und der Anfangsbedingung $(Q_1(t=0), Q_2(t=0), Q_3(t=0))^{\mathrm{T}} = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$ für den Zeitraum $0 \leq t \leq \frac{4\pi}{\Omega}$. Beachten Sie dabei, dass die Funktionen abschnittsweise definiert sind. (*7 Punkte*)

Aufgabe 3: Kraftstoß auf Oszillator (*13 Punkte*)

Betrachten Sie einen gedämpften harmonischen Oszillator mit Dämpfungskonstanten $\lambda < \omega_0$. Der Oszillator ruht in seiner Gleichgewichtsposition, bis auf ihn zur Zeit $t = 0$ ein Kraft der Form

$$f(t) = \begin{cases} v_0/T & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

einwirkt. Bestimmen Sie die Auslenkung $x(t)$, indem Sie die DGL

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

mit den gegebenen Anfangsbedingungen lösen. Diskutieren Sie die Grenzfälle $T \to 0$ und $T \gg 1/\lambda$, und skizzieren Sie hierfür die Lösungen.

Hinweis: Die inhomogene DGL kann gelöst werden, indem sie über quadratische Ergänzung in eine homogene DGL überführt wird.