Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 4

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018 **Abgabe 16.11.2017**

(★) Aufgabe 1: Vektorraum mit anderen Verknüpfungsregeln (*10 Punkte*)

Für alle $a \in \mathbb{R}^2$ sei $V_a = \{v_x\}$ eine Menge, deren Elemente v_x, indiziert durch zweidimensionale reelle Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$, die folgenden Rechenregeln erfüllen:

Addition :	$+ : V_a \times V_a \to V_a,$	$(v_x, v_y) \mapsto v_x + v_y := v_{x+y-a}$
Multiplikation mit einem Skalar:	$\cdot : \mathbb{R} \times V_a \to V_a,$	$(\lambda, v_x) \mapsto \lambda \cdot v_x := v_{\lambda x} + f(a, \lambda)$

Hier ist $f(a, \lambda)$ eine in a und λ lineare Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass mit der Addition „+" für alle $v_x, v_y, v_z \in V_a$ gilt

(i) Assoziativgesetz: $(v_x + v_y) + v_z = v_x + (v_y + v_z)$.
(ii) Kommutativität: $v_x + v_y = v_y + v_x$.
(iii) Neutrales Element: Es gibt ein Element $0 \in V_a$, so dass für alle $v_x \in V_a$ gilt: $0 + v_x = v_x$.
(iv) Inverses Element: Zu jedem $v_x \in V_a$ gibt es ein $v_x^{-1} \in V_a$ mit $v_x + v_x^{-1} = 0$.

und bestimmen Sie das neutrale Element 0 sowie das Inverse von v_x bezüglich der Addition. (*4 Punkte*)

(b) Finden Sie die spezielle Form von f, so dass das Tripel $(V_a, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. (*4 Punkte*)

(c) Kann Ihre Konstruktion auf $a, x \in \mathbb{R}^n$ (wobei n eine positive, ganze Zahl ist) anstelle von $\mathbb{R}^2$ erweitert werden? (*2 Punkte*)

Aufgabe 2: Natürliche Parametrisierung (*8 Punkte*)

Beispielaufgabe

Gegeben sei die Raumkurve $\mathbf{r}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))^T \in \mathbb{R}^2$ für $t \in [0, 2\pi]$.

(a) Bestimmen Sie ihre Bogenlänge $s(t)$ im Intervall $[0, t]$.

(b) Geben Sie die natürliche Parametrisierung $\mathbf{r}_L(s)$ an.

Hausaufgabe

Gegeben sei die Raumkurve $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{ct}}(\cos(\omega \mathrm{t}), \sin(\omega \mathrm{t}))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ für $t \in [0, \tau]$ mit $\omega, c \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie die Raumkurve für den Fall $\tau = \frac{8\pi}{\omega}$ und $c = \frac{1}{\tau}$. (Diese Angaben gelten nur für Teilaufgabe (a), nicht für (b-f).) (*1 Punkt*)

b) Berechnen Sie den Betrag der Kurvengeschwindigkeit $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$. (*1 Punkt*)

c) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$. (*2 Punkte*)

d) Bestimmen Sie die natürliche Parametrisierung $\mathbf{r}_L(s)$. (*2 Punkte*)

e) Überprüfen Sie explizit, dass $\left|\frac{d\mathbf{r}_L}{ds}\right| = 1$ gilt. (*2 Punkte*)

Aufgabe 3: Verfolgungsjagd entlang einer Kurve *(7 Punkte)*

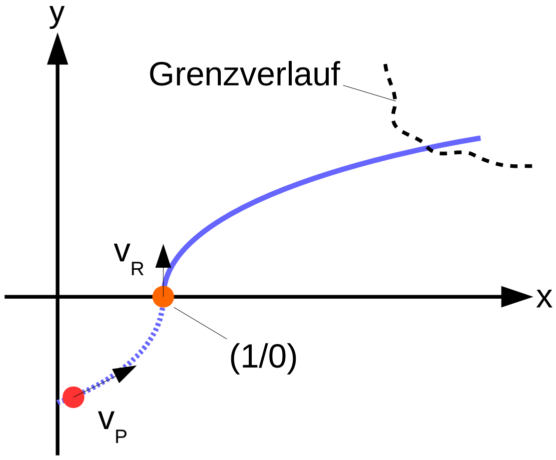


Abbildung 1: Die Verfolgungsjagd zwischen den Räubern (orange) und der Polizei (rot) entlang der Fahrbahn (blau), sowie Verlauf der Landesgrenze. (Skizze nicht maßstabsgetreu.)

Der Verlauf einer Autobahn ist durch den Graphen der Funktion $f(x) = \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ für $x \geq 1$ gegeben, wobei x in Metern gemessen wird (siehe Abb. 1). Diese ist Schauplatz einer Verfolgungsjagd zwischen Räubern und der Polizei, die sich mit überhöhter Geschwindigkeit von $v_R = 40$ m/s bzw. $v_P = 50$ m/s entlang der Fahrbahn fortbewegen. Dabei haben die Diebe im Punkt (1/0) einen Vorsprung von $\Delta t = 5$ Sekunden vor der Polizei. Doch trotz scheinbarer Überlegenheit der Polizei ist der Ausgang der Verfolgungsjagd ungewiss: Die Autobahn passiert im Punkt $(1000/f(1000))$ eine Landesgrenze, hinter der die Zuständigkeit der Polizei endet. Gelingt es der Polizei die Flüchtigen vor dieser Grenze zur Strecke zu bringen?

Aufgabe 4: Orthonormalisierung *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie jeweils die Dimension des Spanns der Mengen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bzw. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ und finden Sie mithilfe des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis, deren erster Basisvektor parallel zu $\mathbf{v}_1$ liegt.

Beispielaufgabe

$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{v}_3 = (0, 1, 2)^{\mathrm{T}}$

Hausaufgabe

(a) $\mathbf{v}_1 = (2, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{v}_2 = (1, -4, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{v}_3 = (3, 4, -3)^{\mathrm{T}}$ (*2 Punkte*)

(b) $\mathbf{v}_1 = (2, 3, 4, 5)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{v}_2 = (-3, 5, 0, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{v}_3 = (2, 2, 2, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{v}_4 = (1, 10, 6, 8)^{\mathrm{T}}$ (*3 Punkte*)

Aufgabe 5: Anwendungsaufgaben (*10 Punkte*)

Lösen Sie folgende Anwendungsaufgaben zu Vektoren.

Beispielaufgabe: Bootsfahrt

Ein Boot kann bei ruhigem Wasser mit 8 km/h auf einem See fahren. In fließendem Wasser kann es mit 8 km/h relativ zu dem strömenden Wasser fahren. Wenn die Geschwindigkeit des Wasserstromes 3 km/h beträgt, wie schnell kann das Boot einen Baum am Ufer passieren, wenn das Boot

(a) flussaufwärts

(b) flussabwärts

fährt?

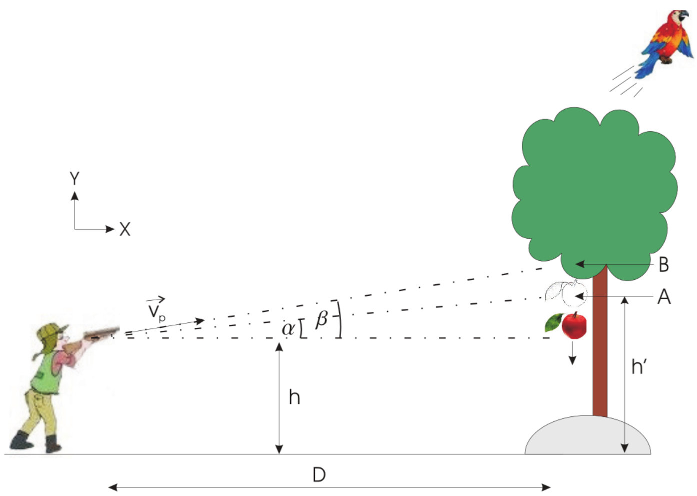
Hausaufgabe: Flugzeug im Wind (*4 Punkte*)

(a) Ein Flugzeug fliegt ostwärts mit einer Geschwindigkeit von 500 km/h. Allerdings weht ein starker Wind mit 90 km/h nach Süden. Was ist die Richtung und die Geschwindigkeit des Flugzeugs relativ zur Erdoberfläche? (*2 Punkte*)

(b) In welche Richtung müsste das Flugzeug steuern um relativ zur Erdoberfläche wirklich nach Osten zu fliegen? (*2 Punkte*)

Hausaufgabe: Zielschießen (*6 Punkte*)

Beachten Sie: Aus Gründen des Tierschutzes schießen unsere Jäger nur auf Fallobst! Besagter Jäger zielt nun auf einen $D = 100$ m entfernten Apfel, der unter einem Winkel von $\alpha = 1°$ relativ zur Augenhöhe ($h = 1{,}70$ m) am Baum hängt (Punkt A, Siehe Abbildung). Zeitgleich macht sich ein Vogel an dem Apfel zu schaffen. Bestimmen Sie nun den Punkt B unter dem Winkel β, auf den unser Jäger zielen muss, damit er das Obst trifft, falls der Vogel



(a) vom Anblick des Mündungsfeuers (Lichtgeschwindigkeit $c \approx 300000$ km/s) (*1 Punkt*)

(b) vom Knall des Gewehres (Schallgeschwindigkeit in Luft $v_{\text{Schall}} \approx 330$ m/s) (*5 Punkte*)

aufgescheucht wird und den Apfel losschüttelt, so dass dieser im selben Moment zu Boden fällt? In welcher Höhe befindet sich der anvisierte Punkt B? Die Gewehrkugel habe dabei betragsmäßig die Startgeschwindigkeit $v_P = 300$ m/s. Reibungseffekte und Reaktionszeit des Vogels sollen vernachlässtigt werden.