Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 7

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018 **Abgabe 14.12.2017**

Aufgabe 1: Matrizenmultiplikation (*10 Punkte*)

Betrachten Sie die folgenden Matrizen. Entscheiden Sie, zwischen welchen von diesen Matrizen-produkte definiert sind und berechnen Sie diese.

Beispielaufgabe

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 19 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 42 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 0 & 121 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 19 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 42 & 7 \\ 10 & 2 & -0.5 & -4 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 23 & 8 \\ 0.5 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}, \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Eigenschaften der Matrizenmultiplikation (*10 Punkte*)

(a) Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ und $C \in \mathbb{R}^{q\times m}$ mit $n, p, q, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Matrizenprodukt assoziativ ist, das heißt es gilt $A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$. (*4 Punkte*)

(b) Zeigen Sie: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ und $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ gilt $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$. (*2 Punkte*)

(c) Es sei

$$\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

die sogenannte Einheitsmatrix. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt invertierbar, falls eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, sodass $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$ gilt.

(i) Zeigen Sie: ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, dann ist auch $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und es gilt $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. (*2 Punkte*)

(ii) Zeigen Sie: sind $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, dann ist auch AB invertierbar. Berechnen Sie die Inverse $(AB)^{-1}$. (*2 Punkte*)

Aufgabe 3: Matrixdarstellung *(10 Punkte)*

Beispielaufgabe

Betrachten Sie die Räume V_3 und V_4 mit $V_n = \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R} \right\}$, also der reellwertigen Polynome 3. und 4. Grades auf dem Intervall $[-1,1]$. Das Ableiten kann als Abbildung

$$D : V_4 \to V_3; f \mapsto f'$$

definiert werden, wobei $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung D linear ist.

Eine mögliche Basis von V_n ist offensichtlich die Menge $\mathcal{B}'_n := \{x^j | 0 \leq j \leq n\}$.

(b) Wie lautet die Matrixdarstellung $\underline{D}'$ von D, wenn für die Ausgangsmenge V_4 die Basis $\mathcal{B}'_4 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ und die Zielmenge V_3 die Basis $\mathcal{B}'_3$ gewählt werden?

(c) Verifizieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie für $f(x) = 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 7$

(i) die Ableitung $f'(x)$ direkt berechnen und anschließend deren Vektordarstellung bezüglich der Basis $\mathcal{B}'_3$ angeben.

(ii) die Vektordarstellung bezüglich der Basis $\mathcal{B}'_4$ angeben und damit über die Matrixdarstellung von D direkt die Vektordarstellung von $f'(x)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}'_3$ berechnen.

Hausaufgabe

Betrachten Sie wieder die Räume V_3 und V_4. Das Aufleiten (Finden einer Stammfunktion) kann als Abbildung

$$I : V_3 \to V_4; f \mapsto F \quad \text{mit } F'(x) = f(x) \text{ und } F(0) = 0$$

definiert werden, wobei die zweite Bedingung $F(0) = 0$ die Integrationskonstante, die beim Integrieren von f auftritt, auf 0 setzt (mit anderen Worten soll die Integrationskonstante weggelassen werden).

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung I linear ist. Warum *müssen* hier, nicht wie im Falle der Ableitung, die Ausgangsmenge – hier ist das V_3 – und die Zielmenge – also V_4 – unterschiedlich sein? *(1 Punkt)*

Wie bereits auf einem der vorherigen Übungsblätter gezeigt wurde, bilden die Polynome

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \qquad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

bezüglich des Standardskalarproduktes eine Orthogonalbasis von V_3 bzw. V_4.

(b) Zeigen Sie, dass die Matrixdarstellung $\underline{I}$ von I, wenn für V_3 und V_4 die Basen $\mathcal{B}_3$ und $\mathcal{B}_4$ mit $\mathcal{B}_i = \{P_j | 0 \leq j \leq i\}$ gewählt werden, gegeben ist durch

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 0 & -1/8 \\ 1 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

(c) In der vorangegangenen Beispielaufgabe wurden für V_3 und V_4 die Basen $\mathcal{B}_3'$ und $\mathcal{B}_4'$ mit $\mathcal{B}_i' = \{x^j | 0 \leq j \leq i\}$ gewählt. Zeigen Sie, dass die Basiswechselmatrizen $\underline{T}_i$, die den Wechsel $\mathcal{B}_i' \to \mathcal{B}_i$ beschreiben, gegeben sind durch

$$\underline{T}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8/35 \end{pmatrix},$$

und $\underline{T}_3$ entsteht aus $\underline{T}_4$, indem sowohl die letzte Zeile als auch letzte Spalte weggestrichen werden. *(2 Punkte)*

(d) Berechnen Sie mit diesen Basiswechselmatrizen die Matrixdarstellung $\underline{D}$ der Abbildung D aus der Beispielaufgabe für die Basen $\mathcal{B}_4$ und $\mathcal{B}_3$.
Hinweis: Die Abbildung D hat mit den Basen $\mathcal{B}_4'$ und $\mathcal{B}_3'$ die Matrixdarstellung

$$\underline{D}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)

(e) Berechnen Sie $\underline{D} \cdot \underline{I}$ und $\underline{I} \cdot \underline{D}$ und kommentieren Sie die Aussagen „Ableiten ist die Umkehrung zum Integrieren“ und „Integrieren ist die Umkehrung zum Ableiten“. *(1 Punkt)*

Aufgabe 4: Bild und Kern linearer Abbildungen *(5 Punkte)*

Es seien V, W Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Für eine Menge $M \subset V$ nennen wir die Menge

$$f(M) := \{f(x) | x \in M\}$$

das *Bild von M unter f*. Das *Bild* von f ist dann definiert durch

$$\text{Bild}\,(f) := f(V).$$

Ferner bezeichnen wir die Menge

$$\text{Kern}\,(f) := \{v \in V | f(v) = 0\}$$

als den *Kern* von f. Zeigen Sie:

(a) Bild(f) ist ein Untervektorraum von W. *(1,5 Punkte)*

(b) Kern(f) ist ein Untervektorraum von V. *(1,5 Punkte)*

(c) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn der Kern von f nur den Nullvektor ernthält. *(2 Punkte)*

Aufgabe 5: Lineares Gleichungssystem (*5 Punkte*)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 28x + 4y - z &= 13 \\ 4x - 7y - 2z &= 8 \\ -x - 2y + 17z &= 42. \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie das Gleichungsystem in der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit einer Matrix A und Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{b}$. (*1 Punkt*)

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem, indem Sie die Matrix A auf Zeilenstufenform bringen.
Anmerkung: Wenn Sie mit dem Begriff Zeilenstufenform nicht vertraut sind, dann finden Sie unter diesem Link eine anschauliche Erklärung: *https://www.mathebibel.de/zeilenstufenform* (*4 Punkte*)