

Mathematischer Vorkurs für Studienanfänger

Übungsblatt 9

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch

M.Sc. Lukas Theis

M.Sc. Andreas Buchheit

WS 2017/2018

09.10.2017

Aufgabe 1: Integration mittels Substitution

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mithilfe geeigneter Substitutionen, d.h. Sie ändern die Integrationsvariable x zu $u(x)$. Um über u zu integrieren, drücken Sie das Differential dx durch du aus. Nach Integration (beachten Sie, dass sie die Integrationsgrenzen entsprechend anpassen müssen) über u führen Sie eine Resubstitution durch, um das Ergebnis durch x auszudrücken.

(a) $\int dx (5x - 4)^3$

(b) $\int dx \sin x \cos x$

(c) $\int dx \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(d) $\int dx x^2 \sqrt[3]{x^3 + 5}$

(e) $\int dx \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

(f) $\int dx \frac{\cos 3x}{\sin^2(3x)}$

(g) $\int dx \sqrt{1 - xx^2}$

Aufgabe 2: Das Gaußintegral

Es sei $g(x) = e^{-x^2}$ die sogenannte Gaußfunktion (diese wird ihnen im Studium noch sehr häufig begegnen!). Diese besitzt trotz ihrer scheinbar einfachen Gestalt keine analytisch darstellbare Stammfunktion. Dennoch lässt sich zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

gilt. Diese Beziehung dürfen sie im Folgenden benutzen. Berechnen Sie nun die Integrale

a)

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x^2}$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx+c} \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2k} e^{-x^2} \text{ mit } k \in \mathbb{N}$$

Hinweis zu d): Was passiert, wenn man e^{-ax^2} nach a ableitet?

Aufgabe 3: Partielle Integration

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit partieller Integration.

a) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{2}} dx x \sin(x)$

b) $\int_{-4}^{10} dx x^3 e^{-x}$

c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} dx \sin^2(x)$

d) $\int_1^e dx \ln^2(x)$