Mathematischer Vorkurs für Studienanfänger
Übungsblatt 10

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
M.Sc. Lukas Theis
M.Sc. Andreas Buchheit

WS 2017/2018 **10.10.2017**

Aufgabe 1: Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale. Konvergieren die Integrale?

(a) $\int\limits_1^\infty dx \, \frac{\exp\left(-\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^2}$

(b) $\int\limits_0^\infty dx \, \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

(c) $\int\limits_1^\infty dx \, \frac{x}{e^{x/2}}$

(d) $\int\limits_0^1 dx \, \frac{\sin(x)}{x}$

(e) $\int\limits_1^\infty dx \, \frac{\ln(x)}{x^p}$ für $p > 1$

(f) $\int\limits_0^\infty dx \, \frac{1}{e^x + e^{-x}}$

Aufgabe 2: Eigenschaften verschiedener Integrale

(a) Was können Sie über die Konvergenz des Integrals $\int\limits_1^\infty dx \, x^{-p}$ in Abhängigkeit von p sagen?

(b) Zeigen Sie durch partielle Integration, dass die Funktion $I(t) = \int\limits_0^\infty dx \, x^t e^{-x}$ für $t > -1$ der Gleichung $I(t) = tI(t-1)$, mit $t > 0$ genügt. Berechnen Sie $I(n)$ explizit für $n \in \{0, 1, 2\}$.

(c) Zeigen Sie für zwei in $[a, b]$ stetige Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Schwarzsche Ungleichung

$$\left(\int\limits_a^b dx \, f(x)g(x)\right)^2 \leq \int\limits_a^b dx \, \{f(x)\}^2 \int\limits_a^b dx \, \{g(x)\}^2. \tag{1}$$

Hinweis: Nutzen Sie als Grundlage der Argumentation eine Ungleichung der Form $p_2(x) \geq 0$, wobei $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ ein quadratisches Polynom in x ist. Sie können daraus anhand der Diskriminanten $\Delta = b^2 - 4ac$ Gleichung (1) beweisen.

Aufgabe 3: Vermischte Integrationsaufgaben

Berechnen Sie die Integrale und nehmen Sie dazu an, dass unbestimmte Konstanten reell sind.

(a) $\int dr \, r \sqrt[3]{9 - r^2}$

(b) $\int d\varphi \cos^n(\varphi) \sin(\varphi)$

(c) $\int dx \, \frac{x}{x^4 - 1}$

(d) $\int dx \, x^m \ln(x)$

(e) $\int dx \, \frac{1}{\cos(x)}$

(f) $\int dx \, \frac{1}{x^2 - a^2}$

(g) $\int dx \, \frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x}}$

(h) $\int dx \, \frac{1}{(\cos(x)(1 + \tan(x)))^2}$

(i) $\int\limits_2^\infty dx \, \frac{1}{x\{\ln(x)\}^k}$

(j) $\int dx \, e^{ax} \cos(bx)$