Mathematischer Vorkurs für Studienanfänger
Übungsblatt 11

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
M.Sc. Lukas Theis
M.Sc. Andreas Buchheit

WS 2017/2018 **11.10.2017**

Aufgabe 1: Lösen von Gleichungssystemen

Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens die Lösungen der Gleichungssysteme

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 &= 1 \\ \frac{3}{2}x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 12 \\ -5x_1 - 6x_2 - 6x_3 &= 14 \\ 15x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 49 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Grundlagen der Vektorrechnung

Es seien

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie

a) $5\mathbf{v}_1 - 22\mathbf{v}_2$ b) $17\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ c) $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$
d) $\mathbf{v_3} \cdot (\mathbf{v_2} + 5\mathbf{v_4})$ e) $(\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_1})\,\mathbf{v}_3$ f) $\mathbf{v}_2\,(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3)$
g) $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_4} - \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2$

(ii) Bestimmen Sie die Ebene durch den Ursprung, die von den Vektoren $\mathbf{v}_3$ und $\mathbf{v}_2$ aufgespannt wird.

(iii) Normieren Sie die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ und $\mathbf{v}_4$.

Aufgabe 3: Polarkoordinaten

Bei vielerlei Fragestellungen in den Naturwissenschaften ist es sinnvoll ein geeignetes Koordinatensystem zu wählen, das von den üblichen kartesischen Koordinaten abweicht. Das vermutlich einfachste Beispiel dafür sind die sogenannten "Polarkoordinaten" r, ϑ in zwei Dimensionen. Hierbei bezeichnet $r := \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty)$ den Radius und $\vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in [0, 2\pi)$ den Winkel (siehe Abbildung 1). Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung $\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \end{pmatrix}$ der Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie diese Vektoren in ein Koordinatensystem.

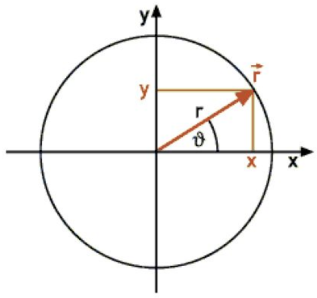

Abbildung 1: Polarkoordinaten