Mathematischer Vorkurs für Studienanfänger
Übungsblatt 12

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
M.Sc. Lukas Theis
M.Sc. Andreas Buchheit

WS 2017/2018 **12.10.2016**

Aufgabe 1: Levi-Civita-Symbol

Es sei

$$\delta_{nm} := \begin{cases} 1 \text{ für } n = m \\ 0 \text{ für } n \neq n \end{cases}$$

das sogenannte Kronecker-Symbol (bzw. Kronecker-δ). Weisen Sie die folgende Identität nach.

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{jm}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{im}.$$

Aufgabe 2: Identitäten mit Kreuzprodukten

a) Beweisen Sie die Identität

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

auf zwei verschiedene Arten:

(i) Durch direktes Nachrechnen.

(ii) Über die Darstellung mittels Levi-Civita-Symbol.

b) Berechnen Sie $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$.

c) Zeigen Sie $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

d) Beweisen Sie die Lagrange-Identität

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}).$$

Aufgabe 3: Einfache Geometrie

(a) Gegeben seien die Ebene $E : 4x_1 + x_3 + 8 = 0$, der Punkt $P = (2|1|1)$ und die Gerade $G : x(\lambda) = (4, 3, -2)^T + \lambda(3, 1, -1)^T,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Liegt der Punkt $Q = (5|4|1)$ innerhalb der Ebene E?

(ii) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden H, die senkrecht auf E steht und durch den Punkt P verläuft.

(iii) Bestimmen Sie den Punkt R auf E, der P am nächsten ist.

(iv) Schneidet die Gerade G die Ebene E? Wenn ja, in welchem Punkt?

(v) Schneiden sich die Geraden G und H? Wenn ja, in welchem Punkt?

(b) Berechnen Sie den Schnittpunkt von Gerade und Ebene:

(i) $G: \quad x(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E: \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} - 4 = 0$

(ii) $G: \quad x(\lambda) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} - 5 = 0$