Mathematischer Vorkurs für Studienanfänger
Übungsblatt 13

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
M.Sc. Lukas Theis
M.Sc. Andreas Buchheit

WS 2017/2018 **13.10.2017**

Aufgabe 1: Lineare Unabhängigkeit

Prüfen Sie folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

(a) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Normierung, Orthogonalität, Basis

Betrachten Sie zunächst die drei Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Normieren Sie die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$.

(b) Sind die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ voneinander linear (un)abhängig?

(c) Sind die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ paarweise orthogonal?

Betrachten Sie nun die drei Vektoren

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d) Normieren Sie die Vektoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ und $\mathbf{w}_3$.

(e) Sind die Vektoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ und $\mathbf{w}_3$ voneinander linear (un)abhängig?

(f) Sind die Vektoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ und $\mathbf{w}_3$ paarweise orthogonal?

(g) Bestimmen Sie $\sum_{k=1}^{3} \mathbf{w}_k^{(0)} \left(\mathbf{w}_k^{(0)}\right)^T$, wobei $\mathbf{w}_k^{(0)}$ den normierten Vektor $\mathbf{w}_k$ bezeichnet.

Aufgabe 3

Analog zu den ihnen bereits bekannten Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gibt es die sogenannten Matrizen. Hierbei handelt es sich um eine rechteckige Anordnung von Zahlen (n Zeilen, m Spalten), also einer Funktion

$$M : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \to K, \quad (i, j) \mapsto m_{ij}.$$

Jedem Indexpaar (i, j) – hierbei bezeichnet i die Zeile und j die Spalte – wird ein Eintrag, das sogenannte Element, m_{ij} zugeordnet. Mithilfe der Matrizen und ihrer Rechenregeln (die an dieser Stelle nicht relevant sind) lässt sich ein lineares Gleichungssystem mit gleich vielen Unbekannten wie Gleichungen,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

in die Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bringen, wobei gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Aus dieser Darstellung (im Übrigen entspricht A gerade der Koeffizientenmatrix, die Sie bereits aus dem Gaußverfahren zum Lösen von Gleichungssystemen kennen) lassen sich mittels der sogenannten *Determinante* die Lösungen des Gleichungssystems bestimmen. Wir wollen uns der Einfachheit halber auf 2×2 und 3×3 Matrizen beschränken. Allgemein gilt, dass

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

wobei $\det(A)$ die Determinante der Matrix A kennzeichnet. A_i ist die Matrix, die entsteht, wenn die i-te Spalte der Matrix A durch den Lösungsvektor $\mathbf{b}$ ersetzt wird. Für den hier betrachteten Fall von Matrizen berechnen sich die Determinanten wie folgt ($\to$ Regel von Sarrus):

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Berechnen Sie mit dieser Methode die Lösungen folgender Gleichungssysteme:

(a) $$\begin{aligned} 6x + 12y &= 30 \\ 3x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} -x + y + z &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 5 \\ 5x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$