Mathematischer Vorkus für Studienanfänger
Übungsblatt 2

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
M.Sc. Lukas Theis
M.Sc. Andreas Buchheit

WS 2017/2018 **26.09.2017**

Aufgabe 1: Stetigkeit – Pole: Teil 1

(a) Was muss gelten, damit $f(x)$ stetig bei $x = a$ ist?

(b) Finden Sie (falls existent) die Stellen, an denen

(i) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & , x \neq -2 \\ 0 & , x = -2 \end{cases}$

unstetig ist.

(c) Finden Sie (falls existent) die Unstetigkeitsstellen von

$$f(x) = \frac{3x+3}{x^2-3x-4}$$

und geben Sie Gleichungen für vertikale und horizontale Asymptoten an.

(d) Welchen Wert muss die Konstante k in den folgenden Funktionen annehmen, damit sie stetig sind?

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & , x \neq 4 \\ k & , x = 4 \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x+2}-\sqrt{6x+4}}{x-2} & , x \geq -\frac{2}{7} \text{ und } x \neq 2 \\ k & , x = 2 \end{cases}$

(e) Definieren Sie

(i) $f(x)$ ist linksseitig stetig bei $x = a$

(ii) $f(x)$ ist rechtsseitig stetig bei $x = a$

(f) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & , x > 1 \end{cases}$$

(i) Ist f stetig auf dem Intervall $[0, 1]$?

(ii) Ist f stetig auf dem Intervall $[1, 2]$?

(g) Bestimmen Sie die Asymptoten der Funktionen

(i) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-1}$

(ii) $f(x) = \frac{-6+x+4x^2+x^3}{1-x}$

und skizzieren Sie den Funktionsverlauf. Geben Sie den links-/rechtsseitigen Grenzwert an der Polstelle an.

Aufgabe 2: Logik - Aussagenlogik

Gegeben seien für jede natürliche Zahl n die folgenden Aussagen:

$$A(n) := \text{“}1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.\text{“}$$
$$B(n) := \text{“}2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1) + 3.\text{“}$$
$$C(n) := \text{“}1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2n = 2n^2 + n + 3.\text{“}$$

Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen n die Implikationen:

$$A(n) \Rightarrow A(n+1);$$
$$B(n) \Rightarrow B(n+1);$$
$$(A(n) \text{ und } B(n)) \Rightarrow C(n);$$

Für welche der obigen Aussagen können Sie aufgrund Ihrer Überlegungen entscheiden, ob sie richtig oder falsch sind?

Aufgabe 3: Komplexe Zahlen

(a) Vereinfachen Sie mithilfe der imaginären Einheit i:

(i) $\sqrt{4-7}$

(ii) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{-4}}$

(b) Zeigen Sie, dass man den Real-/Imaginärteil von $z = x + iy$ durch

$$\mathrm{Re}\,\{z\} = \frac{z + z^*}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\,\{z\} = \frac{z - z^*}{2i}$$

erhält.

(c) Zeigen Sie für $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2)$

(i) $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$

(ii) $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$

(iii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(d) Berechnen Sie:

(i) i^8

(ii) $(-i)^3$

(iii) i^{-2}

(e) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 2i$ und $z_2 = 3i - 2$.

(i) Geben Sie Real- und Imaginärteile an.

(ii) Stellen Sie die Zahlen in der komplexen Ebene dar.

(iii) Bestimmen Sie die Beträge und Argumente der komplexen Zahlen, und geben Sie sie ihre Polardarstellung an.

(iv) Wie lautet die Summe bzw. das Produkt von z_1 und z_2?

(v) Bestimmen Sie den Real-/Imaginärteil von $\dfrac{z_1}{z_2}$.

(f) Finden Sie alle Werte von $\sqrt[5]{-1}$.