Mathematischer Vorkus für Studienanfänger
Übungsblatt 3

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
M.Sc. Lukas Theis
M.Sc. Andreas Buchheit

WS 2017/2018 **27.09.2017**

Aufgabe 1: Gleichungen lösen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen bzw. Gleichungssysteme nach einer Methode Ihrer Wahl und geben Sie an, wie Lösungen ggf. von einem freien Parameter abhängen.

(a) $x^2 - 6x = 27$

(b) $3x^2 - \frac{117}{10}x + \frac{21}{5} = 0$

(c) $2x^2 - 4x + 2k^2 = 0$

(d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(e) $$\begin{aligned} 6x + 12y &= 30 \\ 3x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

(f) $$\begin{aligned} -x + y + z &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 5 \\ 5x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Polynome und Polynomdivision

(a) Führen Sie Polynomdivision durch

(i) $\left(x^4 - 2x^3 - 24x^2 + 15x + 50\right) \div (x + 4)$

(ii) $\left(2x^4 - 17x^2 - 4\right) \div (x + 3)$

(b) Beweisen Sie folgendes Theorem:
Falls r eine Nullstelle der Gleichung $P(x) = 0$ ist, wobei $P(x)$ ein Polynom in x beschreibt, dann ist $(x - r)$ ein Faktor von $P(x)$. Umgekehrt gilt, dass wenn $(x - r)$ ein Faktor von $P(x)$ ist, handelt es sich bei r um eine Lösung von $P(x) = 0$.

(c) Nutzen Sie Aufgabenteil (b), um folgende Aufgaben zu bearbeiten:

(i) Ist -1 eine Lösung von $x^3 - 7x - 6 = 0$?

(ii) Lösen Sie $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, unter dem Wissen, dass 5 eine der Lösungen ist.

(iii) Lösen Sie $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$, unter dem Wissen, dass -1 und 2 Lösungen sind.

Aufgabe 3: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Seien A und B Mengen. Bestimmen Sie für jede der folgenden Kombinationen eine Abbildung $f : A \to B$, die

- injektiv, aber nicht surjektiv ist,
- surjektiv, aber nicht injektiv ist,
- bijektiv ist.

(a) $A = B = \mathbb{R}$

(b) $A = \mathbb{R}, B = (0, \infty)$

(c) $A = (0, \infty), B = \mathbb{R}$

(d) $A = [0, 1], B = [0, 1)$

(e) $A = [0, 1], B = (0, 1)$

(f) $A = (0, 1), B = \mathbb{R}$

Aufgabe 4: Monotonie

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $f(a) < f(b)$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gibt eine streng monoton wachsende Funktion f.

b) f ist streng monoton wachsend.

c) Es gibt eine streng monoton fallende Funktion f.

d) Alle Funktionen f sind umkehrbar.