Mathematischer Vorkurs für Studienanfänger
Übungsblatt 7

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
M.Sc. Lukas Theis
M.Sc. Andreas Buchheit

WS 2017/2018 **05.10.2016**

Aufgabe 1: Reihenentwicklung

Unter der Taylorentwicklung versteht man eine Reihenentwicklung, bei der eine gegebene glatte Funktion (d.h. unendlich oft differenzierbar) in der Umgebung um einen sogenannten Entwicklungspunkt x_0 durch eine Potenzreihe dargestellt wird. Für eine eindimensionale Funktion $f(x)$ lautet die Taylorreihe $Tf(x, x_0)$

$$Tf(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^n \,. \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung der Funktion $f(x)$. Spricht man von einer Taylorreihe der Ordnung N, so wird die Entwicklung bei $n = N$ abgebrochen. Bestimmen Sie die ersten N Ableitungen der folgenden Funktionen und werten Sie diese an den gegebenen Stellen x_0 aus. Nutzen Sie dann Glg. (1), um die Taylorreihe der Funktionen um die gegebenen Entwicklungspunkte zu bestimmen:

(a) $f(x) = \sqrt{1 + x}, \quad \text{mit } N = 2 \text{ und } x_0 = 0$

(b) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}, \quad \text{mit } N = 2 \text{ und } x_0 = 0$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}, \quad \text{mit } N = 2 \text{ und } x_0 = 0$

(d) $f(x) = -\dfrac{x^7}{4}, \quad \text{mit } N = 5 \text{ und } x_0 = -2$

(e) $f(x) = \sin(x), \quad \text{mit } N = 2 \text{ und } x_0 = 0$

Aufgabe 2: Regel von L'Hospital

Berechnen Sie die Grenzwerte

a)
$$\lim_{x \to 1} \frac{-x^2 + x}{\sqrt{x} - 1}$$

b)
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{1 - 3x - x^4}$$

c)
$$\lim_{x \to 9} \frac{9 - x}{\sqrt{x} - 3}$$

d)
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{1 - x^2}$$

Aufgabe 3: Extremwertaufgaben

a) Eine Gemeinde möchte einen neuen Spielplatz einrichten. Dieser Spielplatz soll die Form eines Rechtecks mit einer Fläche von 450m^2 haben.
Eine Seite des Rechtecks grenzt an einen Bach. Die anderen Seiten sollen von Bäumen umrandet werden. Wie sind die Maße des Spielplatzes zu wählen, damit möglichst wenige Bäume gebraucht werden?

b) Im Handel werden üblicherweise zylindrische Konservendosen benutzt, die standardisierte Füllvolumina haben (z. Bsp. 330ml).

(i) Zeigen Sie allgemein, dass für die Oberfläche O eines Zylinders mit vogegebenem Volumen V die Beziehung $O = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$ gilt, wobei r den Radius des Zylinders bezeichnet.

(ii) Wann wird das benötigte Material zur Herstellung einer Dose vorgegebenem Füllvolumens minimal?

(iii) Berechnen Sie die optimalen Abmaße einer Getränkedose mit 330ml Füllvolumen. Warum weichen die echten im Handel verwendeten Dosen von dieser Lösung ab?

c) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 3x + 3$. Bestimmen Sie den Punkt $P_0 = (x_0, f(x_0))$, dessen Entfernung zum Ursprung minimal ist.